Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Depto. de Matemática y C.C.
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo Anual Ingeniería Civil
Examen, Año 2011

Problema 1. (15 pts.) Se desea fabricar un recipiente cilíndrico, con fondo y tapa, de superficie 24π $[cm^2]$. Determine las dimensiones de dicho recipiente para que su capacidad sea la máxima posible. Encuentre además dicha capacidad.

Problema 2. (15 pts.) L_0 es la longitud de un alambre de cobre a 0ºCelsius y $L(t)$ es la longitud a tºCelsius, donde

$$L(t) = L_0(1 + 0{,}16 \times 10^{-4}t + 0{,}10 \times 10^{-7}t^2)$$

Encuentre la tasa de cambio (respecto a la temperatura) del área encerrada por una circunferencia hecha con dicho alambre de cobre cuando la temperatura es 22ºCelsius y L_0 mide $100[cm]$.

Problema 3. (15 pts.) Sea $\mathcal{R}$ la región del plano encerradas por las curvas $y = x^2 - 4x + 5$; $y = -x^2 + 6x - 3$.

(3.1) Grafique la región $\mathcal{R}$.

(3.2) Calcule su área.

Problema 4. (15 pts.) Grafique la curva $y = e^{-x}$, con $x \in [\,0, \infty\,[$. Considere los rectángulos R_n, cuya base es el intervalo $[n, n+1]$, $n = 0, 1, 2\ldots$ y su altura es $e^{-(n+1)}$. Calcule A − S, donde:

- $\text{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\ ;\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$ (área bajo la curva).
- $\text{S} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$ (suma de las áreas de los rectángulos).

PAUTA EXAMEN

Problema 1. (15 pts.) Se desea fabricar un recipiente cilíndrico, con fondo y tapa, de superficie 24π $[cm^2]$. Determine las dimensiones de dicho recipiente para que su capacidad sea la máxima posible. Encuentre además dicha capacidad.

La capacidad del recipiente corresponde al volumen´, por lo tanto, se debe optimizar el volumen del recipiente cilíndrico. El Volumen de un cilindro es dado por

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Por otro lado, la condición superficial es la siguiente

$$\underbrace{2\pi r^2}_{2\ tapas} + \underbrace{2\pi r h}_{manto} = 24\pi \;\Rightarrow\; r^2 + rh = 12$$

De donde se tiene

$$h = \frac{12}{r} - r$$

Con esta relación podemos escribir el volumen en función del radio, r.

$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{12}{r} - r\right) = \pi(12r - r^3)$$

Derivando e igualando a cero

$$\frac{V(r)}{dr} = V'(r) = \pi(12 - 3r^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12 - 3r^2 = 0$$

Donde tenemos que $r = -2$ (no es respuesta) o $r = 2$ que si es respuesta al problema.

Para verificar si efectivamente existe un máximo para $r = 2$, aplicamos el criterio de la 2ª derivada

$$V''(r) = \pi(-6r) = 0 \;\rightarrow\; V''(2) = -12\pi < 0$$

Finalmente el volumen máximo. Note que si $r = 2 \;\Rightarrow\; h = 4$ con lo cual se tiene

$$V_{max} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi\ [cm^3]$$

Problema 2. (15 pts.) L_0 es la longitud de un alambre de cobre a 0ºCelsius y $L(t)$ es la longitud a tºCelsius, donde

$$L(t) = L_0(1 + 0{,}16 \times 10^{-4}t + 0{,}10 \times 10^{-7}t^2)$$

Encuentre la tasa de cambio (respecto a la temperatura) del área encerrada por una circunferencia hecha con dicho alambre de cobre cuando la temperatura es 22ºCelsius y L_0 mide 100[cm].

Al formar una circunferencia con el alambre, se tiene (claramente) que el perímetro para una cierta temperatura, es precisamente la longitud a tºCelsius, es decir

$$L(t) = 2\pi r(t)$$

Donde $r(t)$ es el radio de la circunferencia a tºCelsius. De aquí tenemos que

$$r(t) = \frac{L(t)}{2\pi} \;\Rightarrow\; r^2(t) = \frac{L^2(t)}{4\pi^2}$$

Por lo tanto, el área de la circunferencia en función de la temperatura es

$$A(t) = \pi r^2(t) = \frac{1}{4\pi}L^2(t)$$

Ahora, la tasa de cambio pedida, se obtiene al derivar el área respecto a la temperatura, t, y luego evaluar en el instante en que la temperatura alcanza el valor de 22ºCelsius.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=22^{\circ}} &= \frac{1}{2\pi}L(t)\cdot L'(t)\,\Big|_{t=22^{\circ}} \\
&= \frac{1}{2\pi}L(22)\cdot L'(22) \\
&= \frac{1}{2\pi}100(1 + 0{,}16 \times 10^{-4}\cdot 22 + 0{,}10 \times 10^{-7}\cdot 22^2)[cm]\cdot L'(22) \\
&= \frac{1}{2\pi}(100{,}0357)[cm]\cdot L'(22)
\end{aligned}$$

Donde solo falta calcular $L'(22^{\circ})$

$$L'(t) = 100\left(0{,}16 \times 10^{-4} + 0{,}20 \times 10^{-7}t\right)$$

Así

$$L'(22^{\circ}) = 100\left(0{,}16 \times 10^{-4} + 0{,}20 \times 10^{-7}\cdot 22\right) = 164,4 \times 10^{-5}\left[\frac{cm}{^{\circ}C}\right]$$

Finalmente

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=22^{\circ}} = \frac{1}{2\pi}\cdot(100{,}0357)\cdot\left(164,4 \times 10^{-5}\right)\;\left[\frac{cm^2}{^{\circ}C}\right]$$

Problema 3. (15 pts.) Sea $\mathcal{R}$ la región del plano encerradas por las curvas $y = x^2 - 4x + 5$; $y = -x^2 + 6x - 3$.

(3.1) Grafique la región $\mathcal{R}$.

Para graficar note que

- $y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ que es una parábola cóncava con vértice en el punto $V(2,1)$.
- $y = -x^2 + 6x - 3 = 6 - (x-3)^2$ que es una parábola convexa con vértice en el punto $V(3,6)$.
- Los puntos de intersección de las parabolas se obtienen al resolver la ecuación

$$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 6x - 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x-4) = 0$$

Los puntos son $x = 1$ y $x = 4$.

Con ésta información la región es:

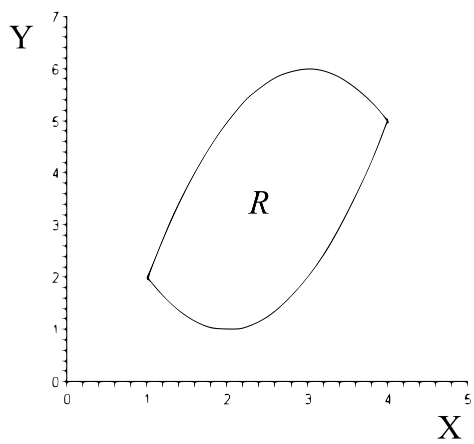


Figura 1: Región $\mathcal{R}$ con $x \in [0,4]$.

(3.2) Calcule su área.

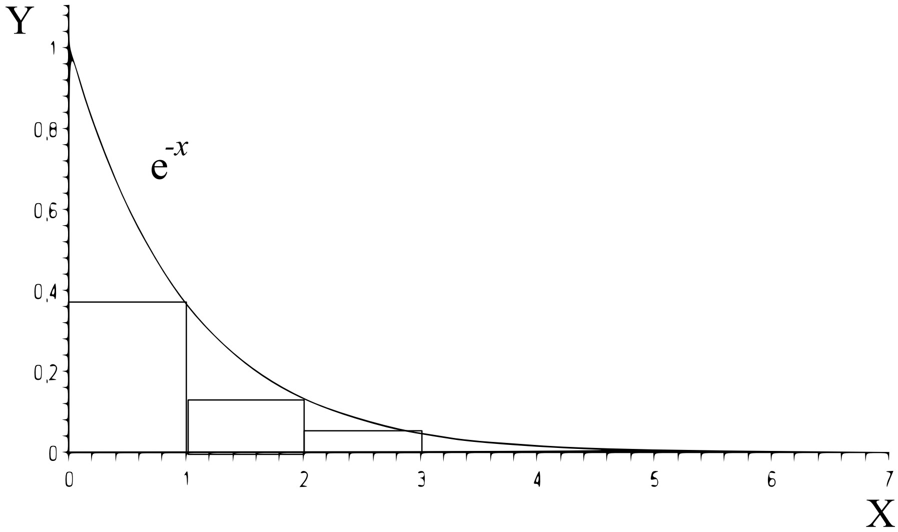
El área es

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 [(-x^2 + 6x - 3) - (x^2 - 4x + 5)]\, dx \\ &= \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8)\, dx \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right)\Big|_1^4 \\ &= \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = 9 \end{aligned}$$

Problema 4. (15 pts.) Grafique la curva $y = e^{-x}$, con $x \in [\,0, \infty\,[$. Considere los rectángulos R_n, cuya base es el intervalo $[n, n+1]$, $n = 0, 1, 2\ldots$ y su altura es $e^{-(n+1)}$. Calcule $\mathrm{A} - \mathrm{S}$, donde:

- $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ ; \ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$ (área bajo la curva).
- $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$ (suma del área de los rectángulos).

El gráfico de la función y los rectángulos se esboza a continuación



El cálculo del área bajo la curva, A.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{c\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^c \\
&= \lim_{c\to\infty} \left(1 - e^{-c}\right) = 1
\end{aligned}
$$

El cálculo de la suma del área de los rectángulos, S.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) - n] e^{-(n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \\
&= \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\mathrm{A} - \mathrm{S} = 1 - \frac{1}{e-1} = \frac{e-2}{e-1}
$$