Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Depto. de Matemática y C.C.
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo Anual Ingeniería Civil
PEP 1, Primer Semestre 2011

Problema 1. (16 pts.) Resuelva la inecuación $\dfrac{3x-4}{|4-3x|-x^2} \leq 0.$

Problema 2. (18 pts.) Considere la función f definida por $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9},\ x \in [0,\infty[\,.$

(2.1) Encuentre Rec f.

(2.2) ¿f es inyectiva? Justifique.

(2.3) Verifique que, para todo $x \in [0,\infty[$, $f(x) \leq f(3)$.

(2.4) Calcule el supremo del conjunto $A = \{f(x) : x \in [0,\infty[\,\}$.

Problema 3. (16 pts.) Sea $\{a_n : n \geq 1\}$ la sucesión definida por $a_n = \dfrac{(2n)!(2\,\theta+1)^{2n}}{(n!)^2}$.
Determine todos los valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para los cuales $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Problema 4. (10 pts.) Considere la función f definida por $f(x) = x^2,\ x \in [a,b]$. Para n natural, $n \geq 2$, se definen:
$a_0 = a, \quad a_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad a_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots \quad, a_{n-1} = a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, \quad a_n = b.$
Es decir, $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0,1,2\ldots,n\}$.

R_k = rectángulo de base $[a_{k-1}, a_k[$ y altura $f(a_k),\ k \in \{1,2\ldots,n\}$.

(4.1) Si A_k es el área del rectángulo R_k, verifique que $A_k = \frac{b-a}{n}\cdot a^2 + 2a\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot k + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3\cdot k^2$.

(4.2) Si $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k$, verifique que $S_n = (b-a)\cdot a^2 + a\cdot(b-a)^2\cdot\frac{n+1}{n} + (b-a)^3\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

(4.3) Calcule $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$.

(4.4) Interprete L.

Datos:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.