Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Depto. de Matemática y C.C.
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo Anual Ingeniería Civil
PEP 2, Año 2011

Problema 1. (20 pts.) Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(1.1) Verifique que $f'(x) = -\dfrac{1}{9}(x-2)f(x)$ y $f''(x) = -\dfrac{1}{9}\left(1 - \dfrac{1}{9}(x-2)^2\right)f(x)$.

(1.2) Determine máximos y/o mínimos y puntos de inflección.

(1.3) Encuentre intervalos de crecimiento y de concavidad.

(1.4) Determine asíntotas y grafique la función f.

Problema 2. (10 pts.) Usando L'Hôpital, calcule:

(2.1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x + \ln(x+1)}$

(2.2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen} x}$

(2.3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{x}{x+\ln(x+1)}}$

Problema 3. (15 pts.) La relación $(1-x)y^2 - 1 = \ln\left(\dfrac{1}{8}x^2y^3\right) - x^4$ $(*)$ define a y como función implícita de x.

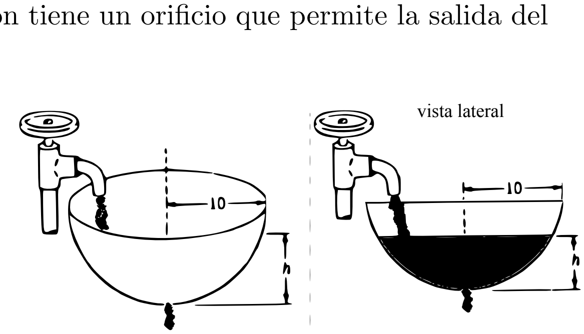
(2.1) Calcule el valor de y cuando $x = 1$.

(2.2) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

(2.3) Determine la ecuación de la recta normal a la curva dada por la relación $(*)$, cuando $x = 1$.

Problema 4. (15 pts.) Por la parte superior de un tazón semiesférico de radio $R = 10[m]$, entra agua a razón constante de $2Q[\frac{m^3}{min}]$. Además, en la parte inferior el tazón tiene un orificio que permite la salida del agua a razón constante de $Q[\frac{m^3}{min}]$. Ver figura

Se puede demostrar que en cualquier instante el volumen de agua en el tazón es $V = R\pi h^2 - \dfrac{\pi}{3}h^3$, donde h es la profundidad del agua en el tazón Calcule el valor de la razón Q en $[\frac{m^3}{min}]$, si la razón de cambio de la profundidad del agua cuando el tazón está lleno a la mitad de su capacidad es de $\frac{1}{225\pi}[\frac{m}{min}]$.



PAUTA PEP 2

Problema 1. (20 pts.) Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(1.1) Dada $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^2\right)$.

Calculo de la 1ª Derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right) \cdot -\frac{1}{2}2\left(\frac{x-2}{3}\right)\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}(x-2)\right) \\
&= f(x) \cdot \left(-\frac{1}{9}(x-2)\right) \\
&= -\frac{1}{9}(x-2)f(x)
\end{aligned}
$$

Calculo de la 2ª Derivada. Usando el resultado anterior se tiene:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{9}(x-2)f(x)\right] \\
&= -\frac{1}{9}\frac{d}{dx}\left[(x-2)f(x)\right] \\
&= -\frac{1}{9}\left[f(x) + (x-2)f'(x)\right] \\
&= -\frac{1}{9}\left\{f(x) + (x-2)\left[-\frac{1}{9}(x-2)f(x)\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right)f(x)
\end{aligned}
$$

(1.2) Determine máximos y/o mínimos y puntos de inflección.

Comentario previo: Ya que la función exponencial verifica que $\exp x > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, claramente, $f(x) > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow\ -\frac{1}{9}(x-2)f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ x = 2
\end{aligned}
$$

Entonces, $x = 2$, es un posible máximo o mínimo para f. Si utilizamos el criterio de la 2ª derivada para máximos y/o mínimos, se tiene

$$
f''(2) = -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}(2-2)^2\right)f(2) = -\frac{1}{9}f(2) = -\frac{1}{9}\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} < 0
$$

Luego, en $x = 2$, la función f tiene un máximo global.

Los candidatos a puntos de inflección son los x tales que $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe. Como $f''(x)$ existe, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces estudiamos la ecuación.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right) f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{9}(x-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 5 \end{aligned}$$

En consecuencia, $x = -1$ y $x = 5$ son candidatos a punto de inflexión.

(1.3) Encuentre intervalos de crecimiento y de concavidad.

Crecimiento de f. Determinemos el signo de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{9}(x-2)f(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{9}(x-2)f(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto f es estrictamente creciente en el intervalo $]-\infty, 2[$ y estrictamente decreciente en el intervalo $]2, +\infty[$.

Concavidad de f. Determinemos el signo de $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right) f(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow 9 - (x-2)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]5, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right) f(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{9}(x-2)^2\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow 9 - (x-2)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \,]-1, 5[\end{aligned}$$

Por lo tanto f es convexa en el intervalo $]-\infty,2[\,\cup]5,+\infty[$ y cóncava en el intervalo $]-1,5[$. Además concluimos que $x=-1$ y $x=5$ son puntos de inflexión

(1.4) Determine asíntotas y grafique la función f.

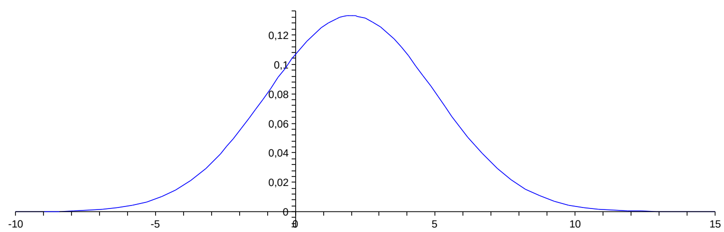
Asíntotas Verticales: No tiene, ya que, la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Asíntotas Horizontales: Calculemos los limites.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right) = 0$$

En consecuencia, la recta $y=0$ es Asíntota Horizontal.

Gráfico de $f(x)$



Problema 2. (10 pts.) Usando L'Hôpital, calcule:

(2.1) La evaluación directa del limite, muestra que éste tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Usando L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{2}$$

(2.2) La evaluación directa del limite, muestra que éste tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Usando L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} = 2$$

(2.3) En virtud a los items anteriores y del hecho que $\left(\frac{2x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{x}{x+\ln(x+1)}} = \exp\left(\frac{x}{x+\ln(x+1)} \cdot \ln\left(\frac{2x}{\operatorname{sen} x}\right)\right)$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{x}{x+\ln(x+1)}} = \exp\left(\frac{1}{2}\cdot \ln 2\right) = \sqrt{2}$$

Problema 3. (15 pts.) La relación $(1-x)y^2-1 = \ln\left(\frac{1}{8}x^2y^3\right) - x^4$ $(*)$ define a y como función implícita de x.

(2.1) Si $x=1$, entonces

$$\begin{aligned}
(1-1)y^2-1 = \ln\left(\frac{1}{8}1^2y^3\right) - 1^4 \quad &\Rightarrow \quad -1 = \ln\left(\frac{1}{8}y^3\right) - 1 \\
&\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{8}y^3\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{8}y^3 = e^0 = 1 \\
&\Rightarrow \quad y^3 = 8 \\
&\Rightarrow \quad y = 2
\end{aligned}$$

(2.2) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

La relación $(*)$ se pede escribir como $\ln\left(\dfrac{1}{8}x^2y^3\right) - (1-x)y^2 = x^4 - 1$. Derivamos implícitamente

$$\frac{\left(\frac{1}{8}x^2y^3\right)'}{\frac{1}{8}x^2y^3} - \Big(-y^2 + (1-x)\cdot 2y\ y'\Big) = 4x^3$$

$$\frac{\frac{1}{8}\left(2xy^3 + x^2\cdot 3y^2\ y'\right)}{\frac{1}{8}x^2y^3} - \Big(-y^2 + (1-x)\cdot 2y\ y'\Big) = 4x^3$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\ y' + y^2 - (1-x)2y\ y' = 4x^3$$

$$\left(\frac{3}{y} - (1-x)2y\right) y' = 4x^3 - \frac{2}{x} - y^2$$

$$y' = \frac{4x^3 - \frac{2}{x} - y^2}{\left(\frac{3}{y} - (1-x)2y\right)}$$

(2.3) Determine la ecuación de la recta normal a la curva dada por la relación $(*)$, cuando $x = 1$.

Como vimos en el item (2.1), si $x = 1$ entonces $y = 2$, por lo tanto, se debe determinar la ecuación de la recta normal, que pasa por el punto de coordenadas $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

La pendiente de la recta tangente en el punto (x_0, y_0), se obtiene al calcular $y'(x_0, y_0)$, usando el item (2,2) se tiene

$$y'(x_0, y_0) = y'(1, 2) = \frac{4\cdot 1^3 - \frac{2}{1} - 2^2}{\left(\frac{3}{2} - (1-1)2\cdot 2\right)} = -\frac{4}{3}$$

La relación entre la pendiente de la recta tangente y normal es $m_t \cdot m_n = -1$, con m_t pendiente de la recta tangente y m_n pendiente de la recta normal. En consecuencia

$$-\frac{4}{3}\cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad m_n = \frac{3}{4}$$

La ecuación de la recta normal es dada por: $y - y_0 = m_n(x - x_0)$, luego la ecuación pedida es $y - 2 = \frac{3}{4}(x-1)$, es decir, $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

Problema 4. (15 pts.) Dado que el valor del radio del tazón es $R = 10[m]$, el volumen de agua en él (para cualquier instante) será $V = 10\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3$, donde el volumen de agua V y la profundidad h son funciones dependientes del tiempo t, entonces, la variación del volumen en el tiempo es

$$\frac{dV}{dt} = \left(20\pi h - \pi h^2\right)\frac{dh}{dt} \quad \text{(sin considerar unidades)}$$

Además se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = 2Q - Q = Q$$

Entonces

$$Q = \left(20\pi h - \pi h^2\right)\frac{dh}{dt}$$

Por otro lado, la mitad de la capacidad corresponde a un cuarto del volumen de la esfera, es decir:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{\pi}{3}R^3$$

Entonces, el volumen de agua en dicho instante es $10^3\frac{\pi}{3}$. Con esto podemos obtener la profundidad h al resolver la ecuación cúbica

$$10\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3 = 10^3\frac{\pi}{3}$$

$$30h^2 - h^3 = 10^3$$

Importante: Para efectos de corrección, hasta aquí se considera correcto el problema.

La solución de esta ecuación cúbica da como resultado $h \approx 6,5 = \frac{13}{2}$, y como $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{225\pi}$, se tiene

$$Q = \left(20\pi\frac{13}{2} - \pi\left(\frac{13}{2}\right)^2\right)\frac{1}{225\pi}$$

$$Q = \frac{39}{100}$$