Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Depto. de Matemática y C.C.
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo Anual Ingeniería Civil
PEP 3, Año 2011

---

**Problema 1.** (15 pts.) Sea $f(x) = \ln\left(1 + (\cos x)^4\right)$.

(1.1) Calcule $\dfrac{d}{dx} f(x)$.

(1.2) Determine los valores de $x \in [0, 2\pi[$, donde la recta tangente a $f$ es paralela al eje $X$.

(1.3) Encuentre la ecuación de la recta normal a $f$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

**Problema 2.** (15 pts.) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo rectángulo de catetos 5 y 12 e hipotenusa 13, si un vértice del rectángulo está sobre la hipotenusa.

**Problema 3.** (15 pts.) Sea $V(x)$ función, con $x \in [0, 4]$. Suponga que $V(0) = 0$, $V'(0) = 12$ y $V''(x) = 4x - 10$.

(3.1) Encuentre máximos y/o mínimos y puntos de infexión.

(3.2) Encuentre $a, b \in [0, 4]$ tal que, para todo $x \in [0, 4]$, $V(a) \leq V(x) \leq V(b)$.

(3.3) Determine intervalos de crecimiento y de concavidad.

(3.4) Bosqueje el gráfico de $V(x)$.

**Problema 4.** (15 pts.) Calcule las siguientes integrales (responda sólo dos de los tres ítems).

(4.1) $\displaystyle\int e^{3x} \operatorname{sen} x \, dx$

(4.2) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} + x + 1)^2}{\sqrt{x}} \, dx$

(4.3) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\operatorname{sen} x)^2 + \pi}} \, dx.$

# PAUTA PEP 3

**Problema 1.** (15 pts.) Sea $f(x) = \ln\left(1 + (\cos x)^4\right)$

(1.1) Calcule $\dfrac{d}{dx} f(x)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\ln\left(1 + (\cos x)^4\right)\right] \\
&= \frac{1}{1 + (\cos x)^4} \cdot \frac{d}{dx}\left(1 + (\cos x)^4\right) \\
&= \frac{4(\cos x)^3}{1 + (\cos x)^4} \cdot \frac{d}{dx}(\cos) \\
&= \frac{4(\cos x)^3}{1 + (\cos x)^4} \cdot (-\operatorname{sen} x) \\
&= \frac{-4(\cos x)^3 \operatorname{sen} x}{1 + (\cos x)^4}
\end{aligned}
$$

(1.2) Determine los valores de $x \in [0, 2\pi[$ donde la recta tangente a $f$ es paralela al eje $X$.

Una recta tangente paralela al eje $X$, se caracteriza por tener pendiente igual a cero, entonces los valores de $x \in [0, 2\pi[$, para los cuales la recta tangente a $f$ sea paralela al eje $X$, se obtienen al resolver la ecuación

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-4(\cos x)^3 \operatorname{sen} x}{1 + (\cos x)^4} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\cos x)^3 \operatorname{sen} x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\cos x)^3 = 0 \ \vee \ \operatorname{sen} x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \qquad \vee \qquad \operatorname{sen} x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \ \vee \ x = k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \ \vee \ x = \frac{3\pi}{2} \ \vee \ x = 0 \ \vee \ x = \pi
\end{aligned}
$$

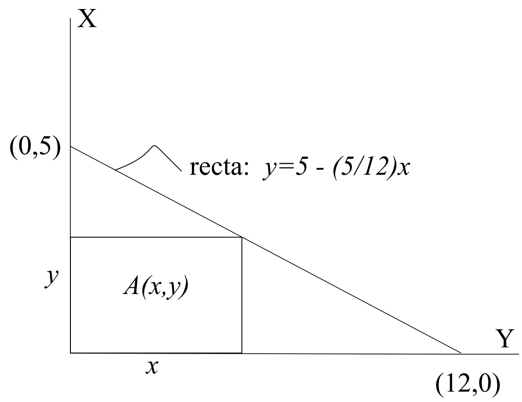
(1.3) Encuentre la ecuación de la recta normal a $f$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Del item anterior tenemos que para la coordenada $x = \frac{\pi}{2}$, la recta tangente a $f$ es paralela al eje $X$, por lo tanto, se deduce que la recta normal en ese punto será una recta paralela al eje $Y$ (vertical) y que pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Esta recta es

$$x = \frac{\pi}{2}$$

**Problema 2.** (15 pts.) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo rectángulo de catetos 5 y 12 e hipotenusa 13, si un vértice del rectángulo está sobre la hipotenusa.

Consideremos es esquema siguiente




El área del rectángulo esta dada por $A(x, y) = xy$, las variables $x$ e $y$ se relacionan mediante la ecuación de la recta que forma la hipotenusa del triángulo rectángulo. Determinemos esta recta

La recta que pasa por dos puntos es: $\quad y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Si consideramos los puntos $(x_1, y_1) = (0, 5)$ y $(x_2, y_2) = (12, 0)$, la recta es

$$y - 5 = \frac{0 - 5}{12 - 0}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 5 - \frac{5}{12}x$$

Con esta relación entre $x$ e $y$, el área la podemos escribir como función de $x$, esto es

$$A(x) = x\left(5 - \frac{5}{12}x\right) = 5x - \frac{5}{12}x^2$$

Derivando e igualando a cero

$$A'(x) = 5 - \frac{5}{6}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Lo que implica $y = 5 - \dfrac{5}{12} \cdot 6 = \dfrac{5}{2}$

Según el criterio de la segunda derivada para máximos y/o mínimos tenemos

$$A'(x) = -\frac{5}{6} < 0 \quad \Rightarrow \quad A'(6) = -\frac{5}{6} < 0$$

Lo que asegura que para las dimensiones encontradas el área del rectángulo inscrito es máxima.

**Problema 3.** (15 pts.) Sea $V(x)$ función, con $x \in [0,4]$. Suponga que $V(0) = 0$ , $V'(0) = 12$ y $V''(x) = 4x - 10$.

(3.1) Encuentre máximos y/o mínimos (locales y globales) y puntos de infexión.

Para determinar máximos y/o mínimos debemos calcular $V'(x)$, entonces

$$V'(x) = \int V''(x)\ dx = \int (4x-10)\ dx = 2x^2 - 10x + C_1$$

El valor de la constante de integración, $C_1$, se obtiene al utilizar la condición $V'(0) = 12$.

$$V'(0) = 2 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + C_1 = C_1 = 12$$

Así

$$V'(x) = 2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6)$$

Ahora, los posibles máximos y/o mínimos los obtenemos mediante el calculo siguiente

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-2)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 3 \end{aligned}$$

Si aplicamos el criterio de la segunda derivada para máximos y/o mínimos tenemos: $V''(2) = 8 - 10 = -2 < 0$, lo que implica un máximo (por el momento, local); y $V''(3) = 12 - 10 = 2 > 0$, lo que implica un mínimo (por el momento, local).

Calculemos $V(x)$

$$V(x) = \int V'(x)\ dx = \int (2x^2 - 10x + 12)\ dx = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 12x + C_2$$

El valor de la constante $C_2$, se obtiene al utilizar la condición $V(0) = 0$.

$$V(0) = \frac{2}{3} \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + C_2 = C_2 = 0$$

Por lo tanto

$$V(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 12x$$

Calculemos el valor de la función en los puntos críticos

$$V(2) = \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = \frac{28}{3} \approx 9,33$$
$$V(3) = \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 9$$

Como el dominio es restringido al intervalo $[0,4]$, evaluemos la función en los extremos:

$$V(0) = 0$$
$$V(4) = \frac{2}{3} \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 = \frac{32}{3} \approx 10,67$$

En resumen:

Mínimo Global: en $x = 0$

Mínimo local: en $x = 3$

Máximo Global: en $x = 4$

Máximo local: en $x = 2$

(3.2) Encuentre $a, b \in [0,4]$ tal que, para todo $x \in [0,4]$ $\;V(a) \leq V(x) \leq V(b)$.

En virtud a los item (3.1), se tiene que $a = 0 \;\wedge\; b = 4$.

(3.3) Determine intervalos de crecimiento y de concavidad.

Para el crecimiento, analizamos el signo de $V'(x)$

$$\begin{aligned} V'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2(x-2)(x-3) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in ]0,2[ \cup ]3,4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'(x) < 0 &\Leftrightarrow 2(x-2)(x-3) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in ]2,3[ \end{aligned}$$

Por lo tanto $f$ es estrictamente creciente en los intervalos $]0,2[ \cup ]3,4]$ y estrictamente decreciente en el intervalo $]2,3[$.

Para determinar los puntos de inflexión, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} V''(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

y analizamos el signo de $V''(x)$

$$\begin{aligned} V''(x) > 0 &\Leftrightarrow 4x - 10 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V''(x) < 0 &\Leftrightarrow 4x - 10 < 0 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Al existir un cambio de concavidad en el punto $x = \frac{5}{2}$, se concluye que es un punto de inflexión.

(3.4) Bosqueje el gráfico de $V(x)$.

El gráfico es

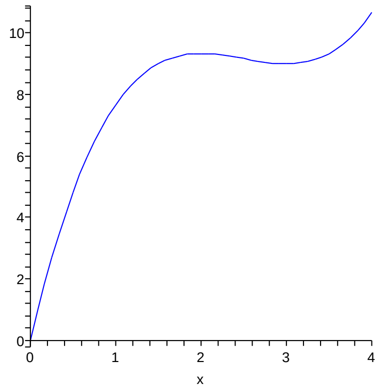



Figura 1: Gráfico de $V(x)$ para $x \in [0,4]$.

**Problema 4.** (15 pts.) Calcule (Entre los items (4.1) , (4.2) y (4.3) escoga solo dos.)

(4.1) $\displaystyle\int e^{3x} \operatorname{sen} x \; dx$

Llamamos $I$ a la integral, entonces $I = \displaystyle\int e^{3x} \operatorname{sen} x \; dx$. Integramos por partes

$u = e^{3x} \;\; \Rightarrow \;\; du = 3e^{3x} \; dx$

$dv = \operatorname{sen} x \; dx \;\; \Rightarrow \;\; v = -\cos x$

Entonces

$$I = -e^{3x} \cos x + 3 \underbrace{\int e^{3x} \cos x \; dx}_{J}$$

Llamamos $J$ a la integral $\int e^{3x} \cos x \; dx$, e integramos por partes

$u = e^{3x} \;\; \Rightarrow \;\; du = 3e^{3x} \; dx$

$dv = \cos x \; dx \;\; \Rightarrow \;\; v = \operatorname{sen} x$

$$J = e^{3x} \operatorname{sen} x - 3 \int e^{3x} \operatorname{sen} x \; dx$$

Esto es

$$J = e^{3x} \operatorname{sen} x - 3I$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= -e^{3x} \cos x + 3J \\ &= -e^{3x} \cos x + 3\left(e^{3x} \operatorname{sen} x - 3I\right) \\ &= -e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \operatorname{sen} x - 9I \end{aligned}$$

De donde tenemos que

$$10I = -e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \operatorname{sen} x$$

que finalmente escribimos

$$I = \frac{-e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\operatorname{sen} x}{10} + C$$

(4.2) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+x+1)^2}{\sqrt{x}}\ dx$

Sea $I = \displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+x+1)^2}{\sqrt{x}}\ dx$. Consideremos las sustitución $u = \sqrt{x}$, de donde tenemos que $2du = \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int (u+u^2+1)^2\ 2\ du \\ &= 2\int (u^2+u+1)^2\ du \\ &= 2\int (u^4+2u^3+3u^2+2u+1)\ du \\ &= 2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{2}+u^3+u^2+u\right)+C \end{aligned}$$

Finalmente

$$I = 2\left(\frac{x^{5/2}}{5}+\frac{x^2}{2}+x^{3/2}+x+\sqrt{x}\right)+C$$

(4.3) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\pi}}\ dx.$

Sea $I = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\pi}}\ dx$. Consideremos las sustitución $u = \operatorname{sen} x$, de donde tenemos que $du = \cos x\ dx$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+\pi}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+(\sqrt{\pi})^2}} \end{aligned}$$

Esta ultima integral la desarrollamos con la sustitución trigonométrica como sigue:

Sea $u = \sqrt{\pi}\tan\theta,\ \ du = \sqrt{\pi}\sec^2\theta\ d\theta$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{\pi}\sec^2\theta\ d\theta}{\sqrt{\left(\sqrt{\pi}\tan\theta\right)^2+(\sqrt{\pi})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} \\ &= \int \sec\theta\ d\theta \\ &= \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C \end{aligned}$$

Entonces

$$I = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

$$I = \ln \left| \sqrt{\frac{u^2 + \pi}{\pi}} + \frac{u}{\sqrt{\pi}} \right| + C$$

$$I = \ln \left| \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \pi}{\pi}} + \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}} \right| + C$$

$$I = \ln \left| \sqrt{\frac{u^2 + \pi}{\pi}} + \frac{u}{\sqrt{\pi}} \right| + C$$

$$I = \ln \left| \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \pi} + \operatorname{sen} x \right| + K$$