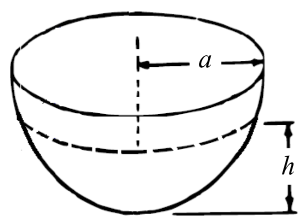
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia, Depto. de Matemática y C.C.
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo Anual Ingeniería Civil
PEP 4, Año 2011

Problema 1. (20 pts.)

(1.1) Sea $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq (y-2)^2 - 1 \ ; \ y \geq x - 3\right\}$. Calcule el área de la región $\mathcal{R}$ (**10 pts**).

(1.2.a) Un tazón semiesférico (de concreto) de radio a contiene agua a una profundidad h. Determine el volumen del agua en el tazón (**7 pts**).

(1.2.b) Si el tazón tiene radio 5 m y entra agua a razón de $0,2\frac{m^3}{seg}$. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 4 m? (**3 pts**).



Problema 2. (20 pts.)

(2.1) Analice la convergencia de la integral $\displaystyle\int_4^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ (**10 pts**).

(2.2) Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$ (**10 pts**).

Problema 3. (20 pts.)

(3.1) Determine $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $a \in \,]\alpha, \beta[$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n)!(3a+4)^{2n}}{(n!)^2}$ sea convergente (**10 pts**).

(3.2) Encuentre el(los) valor(es) de $q \in \mathbb{R}$, de modo que $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \left(\frac{2}{1-q}\right)^n = \frac{1}{2}$ (**10 pts**).

PAUTA PEP 4

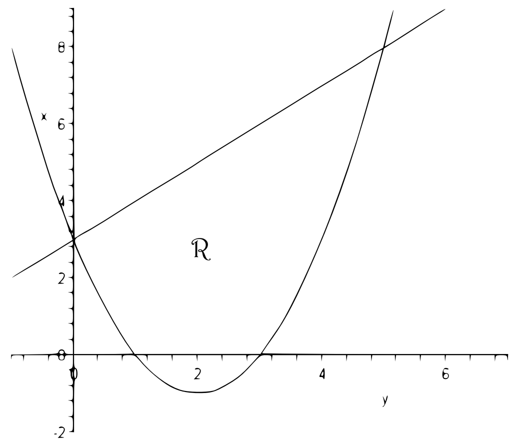
Problema 1. (20 pts.)

(1.1) Sea $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq (y-2)^2 - 1 \ ; \ y \geq x - 3\right\}$. Calcule el área de la región $\mathcal{R}$ (**10 pts**).

La región $\mathcal{R}$ la consideraremos en un plano YX (Eje horizontal Y y eje vertical X). Como sigue

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq (y-2)^2 - 1 \ ; \ x \leq y + 3\right\}$$

Su representación gráfica en el plano YX es



Los valores de y de los puntos intersección (y,x), se obtienen al resolver la ecuación

$$(y-2)^2 - 1 = y + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y(y-5) = 0$$

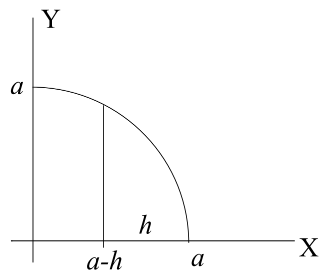
Que tiene por solución a los valores $y = 0$ e $y = 5$.

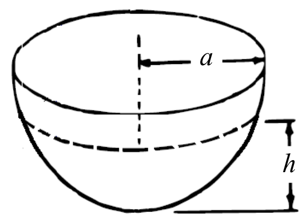
Por lo tanto, el área buscada viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 \{(y+3) - [(y-2)^2 - 1]\} \ dy \\ &= \int_0^5 (5y - y^2) \ dy \\ &= \left[\frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^5 \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

(1.2.a) Un tazón semiesférico (de concreto) de radio a contiene agua a una profundidad h. Determine el volumen del agua en el tazón (**7 pts**).

El volumen de agua se obtiene al girar la curva formada por una parte de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, específicamente, para valores de $x \in [a-h, a]$, y $0 < h \leq a$ fijo. (Ver figura)





Utilizando el método de discos

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{a-h}^{a} (\sqrt{a^2 - x^2})^2 \, dx \\
&= \pi \int_{a-h}^{a} (a^2 - x^2) \, dx \\
&= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{a-h}^{a} \\
&= \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \left(a^2(a-h) - \frac{(a-h)^3}{3} \right) \\
&= \pi \left(ah^2 - \frac{h^3}{3} \right) \\
&= \pi a h^2 - \frac{\pi h^3}{3}
\end{aligned}
$$

(1.2.b) Si el tazón tiene radio 5 m y entra agua a razón de $0,2\frac{m^3}{seg}$. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 4 m? (**3 pts**).

Del item anterior tenemos que $V = \pi a h^2 - \dfrac{\pi h^3}{3}$, reemplazando el valor del radio se tiene $V = 5\pi h^2 - \dfrac{\pi h^3}{3}$, derivando respecto al tiempo

$$\frac{dV}{dt} = \left(10\pi h - \pi h^2\right) \frac{dh}{dt}$$

La variación de la altura respecto al tiempo es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{(10\pi h - \pi h^2)}$$

Finalmente reemplazamos $\frac{dV}{dt} = 0,2 = \frac{1}{5}$ y $h = 4$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{5\pi} \frac{1}{(10 \cdot 4 - 4^2)} = \frac{1}{120\pi} \left[\frac{m}{seg} \right]$$

Problema 2. (20 pts.)

(2.1) Analice la convergencia de la integral $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$ (**10 pts**).

Defina

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3+1}} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Dado que $e^x > 1$ para $x > 0$, en particular para $x \geq 4$, se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{e^x\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = g(x), \quad x \in [4, +\infty)$$

Por otro lado, note que $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ es convergente, debido a que es una integral-p ($p = \frac{3}{2} > 1$) de referencia.

Finalmente, utilizando el criterio de comparación se sigue que $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$ es convergente.

(2.2) Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\, dx$ (**10 pts**).

Claramente la integral es impropia de 1ª Clase. El calculo de la integral lo desarrollamos por sustitución.

Sea $u = e^{-x} + 1$, entonces, $-du = e^{-x}\, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\, dx \\ &= -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln u + k \quad \text{luego} \\ &= -\ln(e^{-x}+1) + k \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia es

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\, dx &= \lim_{c\to\infty} [-\ln(e^{-x}+1) + k]_0^c \\ &= \lim_{c\to\infty} [-\ln(e^{-c}+1) - (0 - \ln 2)] \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Problema 3. (20 pts.)

(3.1) Determine α, $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $a \in]\alpha, \beta[$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(3a+4)^{2n}}{(n!)^2}$ sea convergente (**10 pts**).

Primeramente, cálculamos el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, donde $a_n = \dfrac{(2n)!(3a+4)^{2n}}{(n!)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2(n+1))!(3a+4)^{2(n+1)}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!(3a+4)^{2n}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(3a+4)^{2n}(3a+4)^2}{(n!)^2(n+1)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!(3a+4)^{2n}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)(2n+2)(3a+4)^2}{(n+1)^2}\right| = 4(3a+4)^2$$

Luego, La serie propuesta será convergente, en virtud del criterio del cuociente, si

$$4(3a+4)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |3a+4| < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2} < 3a+4 < \frac{1}{2}$$

De donde se obtiene

$$\frac{-9}{6} < a < \frac{-7}{6}.$$

(3.2) Encuentre el(los) valor(es) de $q \in \mathbb{R}$, de modo que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{1-q}\right)^n = \frac{1}{2}$ (**10 pts**).

Para encontrar tal q primeramente note que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{1-q}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1-q}\right)^{n+2} = \left(\frac{2}{1-q}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1-q}\right)^n.$$

Ahora bien, dado que la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente a $\frac{1}{1-r}$ si y sólo si $|r| < 1$, se sigue que la serie propuesta será convergente si y sólo si $\left|\dfrac{2}{1-q}\right| < 1$, i.e. $2 < |1-q|$.

Por otro lado, la suma de la serie propuesta es

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{1-q}\right)^n &= \left(\frac{2}{1-q}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{1-q}\right)^n \\
&= \frac{4}{(1-q)^2}\frac{1}{1-\frac{2}{1-q}} \\
&= \frac{4}{(1-q)^2}\cdot\frac{1-q}{-(q+1)} \\
&= \frac{-4}{(1-q^2)}.
\end{aligned}$$

Por lo cual, debemos resolver la ecuación $\dfrac{-4}{(1-q^2)} = \dfrac{1}{2}$, cuyas soluciones son $q_1 = -3$ y $q_2 = 3$.

En resumen, q debe satisfacer que $q \in \{3, -3\} \cap \{q \in \mathbb{R} : 2 < |1-q|\}$, esto es, $q = -3$ es el valor buscado.