Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Segundo Semestre 2012

CONTROL III y IV (versión A)

Problema 1. ¿Existe un valor b que haga que la función $g(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x<0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea

(1.1) continua en $x = 0$? (7 pts.)

(1.2) derivable en $x = 0$? (13 pts.)

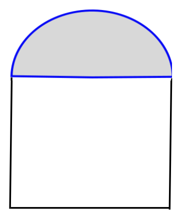
Problema 2. Considere la función $f(x) = x^4(x-5)$, $x \in \mathbb{R}$.

(2.1) Encuentre máximos y/o mínimos (locales) y puntos de inflexión (8 pts.)

(2.2) Determine intervalos de crecimiento y concavidad (7 pts.)

(2.3) Bosqueje el gráfico de $f(x)$ (5 pts.)

Problema 3. Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada con un semicirculo . El rectángulo es de vidrio claro, mientras el semicirculo es de vidrio de color y transmite la mitad de la luz por unidad de área en comparación con el vidrio claro. El perímetro total es fijo, p. Encuentre las proporciones de la ventana que admiten la mayor cantidad de luz. Desprecie el espesor del marco. (20 pts.)



PAUTA CONTROL III y IV (versión A)

Problema 1. ¿Existe un valor b que haga que la función $g(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x<0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea

(1.1) continua en $x=0$? (7 pts.)

Para la continuidad de g, estudiamos los limites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} x+b = b$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$

Igualando los limites concluimos que $b=1$, con este valor $g(x)$ es continua en $x=0$.

(1.2) derivable en $x=0$? (13 pts.)

Una condición necesaria para que la función sea derivable en $x=0$, es que sea continua $x=0$. En consecuencia b debe ser igual a 1. Además debe cumplirse que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h}.$$

O sea debe cumplirse que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Pero, $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h+1-1}{h} = 1$ y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos^2 h - 1}{(\cos h+1)h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} h}{h} \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h+1} = (-1)\cdot 0 = 0.$$

Por lo cual g no es derivable en $x=0$.

Problema 2. Considere la función $f(x) = x^4(x-5)$, $x\in\mathbb{R}$.

(2.1) Encuentre máximos y/o mínimos (locales) y puntos de inflexión (8 pts.)

- Cálculo de la primera derivada y los posibles máximos y/o mínimos para f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3(x-5)+x^4 \\ &= 5x^3(x-4) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff 5x^3(x-4)=0 \\ &\iff x=0 \ \vee \ x=4 \end{aligned}$$

- Cálculo de la segunda derivada y los posibles puntos de inflexión para f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 15x^2(x-4)+5x^3 \\ &= 20x^2(x-3) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\iff 20x^2(x-3)=0 \\ &\iff x=0 \ \vee \ x=3 \end{aligned}$$

(2.2) Determine intervalos de crecimiento y concavidad (7 pts.)

- Intervalos de crecimiento (signo de la primera derivada).

$$\begin{aligned} f'(x)>0 &\iff 5x^3(x-4)>0 \\ &\iff x(x-4)>0 \\ &\iff x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]4,+\infty[\end{aligned}$$

En éste intervalo f es creciente $\nearrow$.
Análogamente obtenemos

$$f'(x)<0 \iff x\in\,]0,4[$$

En éste intervalo f es decreciente $\searrow$.

- Intervalos de concavidad (signo de la segunda derivada).

$$\begin{aligned} f''(x)>0 &\iff 20x^2(x-3)>0 \\ &\iff x-3>0 \\ &\iff x>3 \\ &\iff x\in\,]3,+\infty[\end{aligned}$$

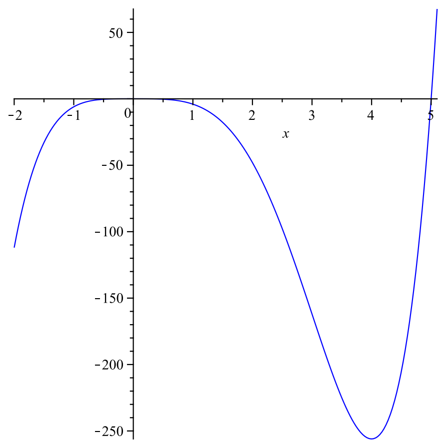
En éste intervalo f es cóncava hacia arriba $\smile$.
Análogamente obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x)<0 &\iff 20x^2(x-3)<0 \\ &\iff x-3<0 \\ &\iff x<3 \\ &\iff x\in\,]-\infty,3[\end{aligned}$$

En éste intervalo f es cóncava hacia abajo $\frown$.

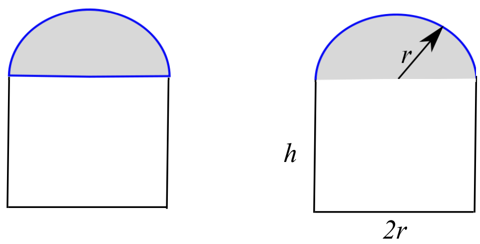
Finalmente, en virtud al criterio de la primera derivada para máximos y/o mínimos, tenemos que en $x=0$ la función posee un máximo local y en $x=4$ un mínimo local. Y podemos notar que posee un solo punto de inflexión que es $x=3$.

(2.3) Bosqueje el gráfico de $f(x)$. (5 pts.)



Problema 3. Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada con un semicirculo . El rectángulo es de vidrio claro, mientras el semicirculo es de vidrio de color y transmite la mitad de la luz por unidad de área en comparación con el vidrio claro. El perímetro total es fijo, p. Encuentre las proporciones de la ventana que admiten la mayor cantidad de luz. Desprecie el espesor del marco. (20 pts.)

Consideremos las dimensiones mostradas en la figura



El perímetro de la figura es $p = 2h+2r+\pi r$, y el área de la ventana es dada por $A = 2rh+\frac{\pi}{2}r^2$. Por otro lado la cantidad de luz, que atraviesa por unidad de area, que denotamos por, $\mathcal{L}$, es $\mathcal{L}(r,h) = 2rh + \frac{\pi}{4}r^2$. De la expresión del perímetro, al despejar $2h$, tenemos $2h = p-(2+\pi)r$, por lo tanto

$$\mathcal{L}(r) = pr - (2+\pi)r^2 + \frac{\pi}{4}r^2$$

$$\mathcal{L}(r) = pr - \left(\frac{8+3\pi}{4}\right)r^2$$

- Luego $\mathcal{L}'(r) = 0$ si

$$p - \left(\frac{8+3\pi}{2}\right)r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{2p}{8+3\pi}$$

- Además,

$$\mathcal{L}''(r) = -\left(\frac{8+3\pi}{2}\right) < 0$$

Luego, existe un máximo para $\mathcal{L}$ en $r = \frac{2p}{8+3\pi}$. Finalmente las dimensiones pedidas son:

$$\text{ancho} = 2r = \frac{4p}{8+3\pi}, \quad alto = h = \frac{p}{2} - \frac{2(2+\pi)}{2(8+3\pi)} = \frac{(4+\pi)}{(8+3\pi)}\frac{p}{2} \quad y \;\; radio = \frac{2p}{8+3\pi}.$$