Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Segundo Semestre 2012

CONTROL III y IV (versión B)

Problema 1. ¿Existe un valor b que haga que la función $g(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x<0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea

(1.1) continua en $x = 0$? (7 pts.)

(1.2) derivable en $x = 0$? (13 pts.)

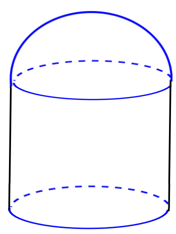
Problema 2. Considere la función $f(x) = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$, $x \in \mathbb{R}$.

(2.1) Encuentre máximos y/o mínimos (locales) y puntos de inflexión (8 pts.)

(2.2) Determine intervalos de crecimiento y concavidad (7 pts.)

(2.3) Bosqueje el gráfico de $f(x)$ (5 pts.)

Problema 3. Se quiere construir un silo (sin incluir la base) en forma de cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción por unidad cuadrada del área superficial es dos veces mayor para la semiesfera que para la pared cilíndrica. Determine las dimensiones que se deben usar si el volumen es fijo (V) y el costo de construcción tiene que mantenerse al mínimo. Ignore el espesor del silo y los desperdicios en la construcción (20 pts.)



PAUTA CONTROL III y IV (versión B)

Problema 1. ¿Existe un valor b que haga que la función $g(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x<0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea

(1.1) continua en $x=0$? (7 pts.)

Para la continuidad de g, estudiamos los limites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} x+b = b$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$

Igualando los limites concluimos que $b=1$, con este valor $g(x)$ es continua en $x=0$.

(1.2) derivable en $x=0$? (13 pts.)

Una condición necesaria para que la función sea derivable en $x=0$, es que sea continua $x=0$. En consecuencia b debe ser igual a 1. Además debe cumplirse que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h}.$$

O sea debe cumplirse que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Pero, $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h+1-1}{h} = 1$ y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos^2 h - 1}{(\cos h+1)h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} h}{h} \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} = (-1)\cdot 0 = 0.$$

Por lo cual g no es derivable en $x=0$.

Problema 2. Considere la función $f(x) = x\left(\dfrac{x}{2}-5\right)^4$, $x\in\mathbb{R}$.

(2.1) Encuentre máximos y/o mínimos (locales) y puntos de inflexión (8 pts.)

- Cálculo de la primera derivada y los posibles máximos y/o mínimos para f.
  Primero, notemos que $f(x) = x\left(\dfrac{x}{2}-5\right)^4 = \dfrac{1}{16}\, x\,(x-10)^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{16}\left[(x-10)^4 + 4x\,(x-10)^3\right] \\ &= \frac{5}{16}(x-10)^3(x-2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff \frac{5}{16}(x-10)^3(x-2)=0 \\ &\iff x=2 \ \vee \ x=10 \end{aligned}$$

- Cálculo de la segunda derivada y los posibles puntos de inflexión para f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{16}\left[3(x-10)^2(x-2)+(x-10)^3\right] \\ &= \frac{5}{4}(x-10)^2(x-4) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\iff \frac{5}{4}(x-10)^2(x-4)=0 \\ &\iff x=4 \ \vee \ x=10 \end{aligned}$$

(2.2) Determine intervalos de crecimiento y concavidad (7 pts.)

- Intervalos de crecimiento (signo de la primera derivada).

$$\begin{aligned} f'(x)>0 &\iff \frac{5}{16}(x-10)^3(x-2)>0 \\ &\iff (x-2)(x-10)>0 \\ &\iff x\in\,]-\infty,2[\,\cup\,]10,+\infty[\end{aligned}$$

En éste intervalo f es creciente $\nearrow$.
Análogamente obtenemos

$$f'(x)<0 \iff x\in\,]2,10[$$

En éste intervalo f es decreciente $\searrow$.

- Intervalos de concavidad (signo de la segunda derivada).

$$\begin{aligned} f''(x)>0 &\iff \frac{5}{4}(x-10)^2(x-4)>0 \\ &\iff x-4>0 \\ &\iff x>4 \\ &\iff x\in\,]4,+\infty[\end{aligned}$$

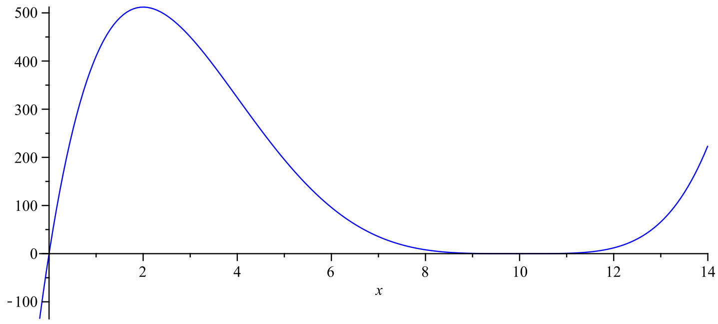
En éste intervalo f es cóncava hacia arriba $\smile$.
Análogamente obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x)<0 &\iff \frac{5}{4}(x-10)^2(x-4)<0 \\ &\iff x-4<0 \\ &\iff x<4 \\ &\iff x\in\,]-\infty,4[\end{aligned}$$

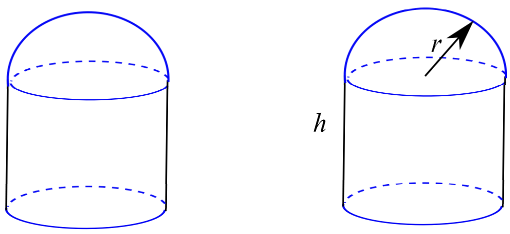
En éste intervalo f es cóncava hacia abajo $\frown$.

Finalmente, en virtud al criterio de la primera derivada para máximos y/o mínimos, tenemos que en $x=2$ la función posee un máximo local y en $x=10$ un mínimo local. Y podemos notar que posee un solo punto de inflexión que es $x=4$.

(2.3) Bosqueje el gráfico de $f(x)$. (5 pts.)



Problema 3. Se quiere construir un silo (sin incluir la base) en forma de cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción por unidad cuadrada del área superficial es dos veces mayor para la semiesfera que para la pared cilíndrica. Determine las dimensiones que se deben usar si el volumen es fijo (V) y el costo de construcción tiene que mantenerse al mínimo. Ignore el espesor del silo y los desperdicios en la construcción (20 pts.)



El volumen del silo es $V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$, y la superficie es es dada por $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Por otro lado, el costo de construcción por unidad de área, que denotamos por, $\mathcal{C}$, será dado por $\mathcal{C}(r,h) = 2\pi rh + 4\pi r^2$. De la expresión del volumen, al despejar h, tenemos $h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2r}{3}$, por lo tanto

$$\mathcal{C}(r) = 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{2r}{3}\right) + 4\pi r^2$$

$$\mathcal{C}(r) = \frac{2V}{r} + \frac{8\pi}{3}r^2$$

- Cálculo de la primera derivada

$$\mathcal{C}'(r) = -\frac{2V}{r^2} + \frac{16\pi}{3}r.$$

Entonces

$$\mathcal{C}'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{6V}{16\pi}, r \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$

- Cálculo de la segunda derivada

$$\mathcal{C}''(r) = \frac{4V}{r^3} + \frac{16\pi}{3} > 0, \, r \text{ positivo}$$

Luego, existe un mínimo para $\mathcal{C}$ en $r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$. Finalmente las dimensiones pedidas son:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} \quad \text{y} \quad h = \frac{3V - 2\pi r^3}{3\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$