Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Segundo Semestre 2012

CONTROL I (versión A)

Problema 1. Resuelva la inecuación $\dfrac{-x^2+x-2}{|-x+2|-3x^2} \leq 1$ (20 pts.)

Problema 2. Resuelva $x+1 > \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ (20 pts.)

Problema 3. Para la ecuación $(15e^2 - |x^2 - e\,|^2)|x^2-e| + e^2|x^2-e| = 0,$ determine su conjunto solución (20 pts.)

PAUTA CONTROL I (versión A)

Problema 1. Resuelva la inecuación $\dfrac{-x^2+x-2}{|-x+2|-3x^2} \leq 1$ (20 pts.) Por la definición de valor absoluto tenemos

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x<2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos

- Caso en que $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{-x^2+x-2}{x-2-3x^2} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+x-2}{x-2-3x^2} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2}{x-2-3x^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2}{3x^2-x+2} \geq 0 \end{aligned}$$

  Note que $3x^2-x+2>0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, y $2x^2 \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, luego el conjunto solución de la inecuación es $\mathbb{R}$. Intersectando con la condición $x \geq 2$, se tiene

$$S_I \equiv\ [2, +\infty[$$

- Caso en que $x < 2$.

$$\begin{aligned} \frac{-x^2+x-2}{2-x-3x^2} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+x-2}{x-2-3x^2} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-2(x+2)(x-1)}{3(x+1)(x-\frac{2}{3})} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2)(x+1)(x-\frac{2}{3})(x-1) \geq 0 \quad ; x \neq -1 \ \wedge \ x \neq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

  En virtud al método reducido, los valores de x que satisfacen la inecuación pertenecen al conjunto

$$]-\infty, -2]\ \cup\ \left]-1, \frac{2}{3}\right[\ \cup\ [1, +\infty[.$$

  Intersectando con la condición $x < 2$, se tiene

$$S_{II} \equiv\ ]-\infty, -2]\ \cup\ \left]-1, \frac{2}{3}\right[\ \cup\ [1, 2[$$

Finalmente la unión de S_I y S_{II} es la solución de la inecuación.

$$S_F = S_I \cup S_{II} =\ ]-\infty, -2]\ \cup\ \left]-1, \frac{2}{3}\right[\ \cup\ [1, +\infty[$$

Problema 2. Resuelva $x+1 > \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ (20 pts.)

Las cantidades subradicales deben satisfacer (simultáneamente) las siguientes condiciones

- $x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$
- $x-3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3$

Así, la condición general de la inecuación es la intersección de estas, a saber, $x > 3$. Además, $x+1 > 0$ para $x > 3$, entonces

$$
\begin{aligned}
x+1 > \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)\sqrt{x-3} \ > \ \sqrt{x+1} \quad /()^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2(x-3) \ > \ x+1 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)[(x+1)(x-3)-1] \ > \ 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2-2x-4) \ > \ 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \big(x-(1-\sqrt{5})\big)\big(x-(-1)\big)\big(x-(1+\sqrt{5})\big) \ > \ 0
\end{aligned}
$$

En virtud al método reducido, los valores de x que satisfacen la inecuación son

$$x \in \Big]1-\sqrt{5}\ ,\ -1\Big[\ \cup \ \Big]1+\sqrt{5}\ ,+\infty\Big[$$

Intersectando con la condición general se obtiene la solución final, que es

$$S_F = \ \Big]1+\sqrt{5}\,,+\infty\Big[$$

Problema 3. Para la ecuación $(15e^2 - |x^2-e\,|^2)|x^2-e| + e^2|x^2-e| = 0$, determine su conjunto solución (20 pts.) Notemos que

$(15e^2 - |x^2-e\,|^2)|x^2-e| + e^2|x^2-e| = 0 \ \Leftrightarrow \ (16e^2 - (x^2-e\,)^2)|x^2-e| = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
(16e^2-(x^2-e\,)^2)|x^2-e| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (16e^2-(x^2-e\,)^2) = 0 \quad \vee \quad |x^2-e| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x^2-e\,)^2 = 16e^2 \quad \vee \quad x^2 = e \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-e = -4e \ \vee \ x^2-e = 4e \quad \vee \quad x=-\sqrt{e} \ \vee \ x=\sqrt{e} \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2=-3e}_{\Rightarrow\Leftarrow} \ \vee \ x^2 = 5e \quad \vee \quad x=-\sqrt{e} \ \vee \ x=\sqrt{e} \\
&\Leftrightarrow \quad x=-\sqrt{5e} \ \vee \ x=\sqrt{5e} \quad \vee \quad x=-\sqrt{e} \ \vee \ x=\sqrt{e}
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución de la ecuación está dada por el conjunto

$$\mathbb{S} = \left\{-\sqrt{5e}\ ,\ -\sqrt{e}\ ,\ \sqrt{e}\ ,\ \sqrt{5e}\right\}$$