

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingeniería
Segundo Semestre 2012

CONTROL I (versión B)

Problema 1. Para la ecuación $(15e^2 - |x^2 - e|^2)|x^2 - e| + e^2|x^2 - e| = 0$, determine su conjunto solución (20 pts.)

Problema 2. Resuelva la inecuación $\frac{-x^2 + x - 2}{|-x + 2| - 3x^2} \geq 1$ (20 pts.)

Problema 3. Resuelva $x + 1 \leq \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ (20 pts.)

PAUTA CONTROL I (versión B)

Problema 1. Para la ecuación $(15e^2 - |x^2 - e|^2)|x^2 - e| + e^2|x^2 - e| = 0$, determine su conjunto solución (20 pts.) Notemos que

$$(15e^2 - |x^2 - e|^2)|x^2 - e| + e^2|x^2 - e| = 0 \Leftrightarrow (16e^2 - (x^2 - e)^2)|x^2 - e| = 0, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} (16e^2 - (x^2 - e)^2)|x^2 - e| = 0 &\Leftrightarrow (16e^2 - (x^2 - e)^2) = 0 \quad \vee \quad |x^2 - e| = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - e)^2 = 16e^2 \quad \vee \quad x^2 = e \\ &\Leftrightarrow x^2 - e = -4e \quad \vee \quad x^2 - e = 4e \quad \vee \quad x = -\sqrt{e} \quad \vee \quad x = \sqrt{e} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -3e}_{\Rightarrow \Leftarrow} \quad \vee \quad x^2 = 5e \quad \vee \quad x = -\sqrt{e} \quad \vee \quad x = \sqrt{e} \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{5e} \quad \vee \quad x = \sqrt{5e} \quad \vee \quad x = -\sqrt{e} \quad \vee \quad x = \sqrt{e} \end{aligned}$$

Finalmente la solución de la ecuación está dada por el conjunto

$$\mathbb{S} = \left\{ -\sqrt{5e}, -\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{5e} \right\}$$

Problema 2. Resuelva la inecuación $\frac{-x^2 + x - 2}{|-x + 2| - 3x^2} \geq 1$ (20 pts.) Por la definición de valor absoluto tenemos

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos

- Caso en que $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + x - 2}{x - 2 - 3x^2} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + x - 2}{x - 2 - 3x^2} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x - 2 - 3x^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2}{3x^2 - x + 2} \leq 0 \end{aligned}$$

Note que $3x^2 - x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, y $2x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, luego la solución de la inecuación es el conjunto $\{0\}$.

Intersectando con la condición $x \geq 2$, se tiene

$$S_I \equiv \emptyset.$$

- Caso en que $x < 2$.

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + x - 2}{2 - x - 3x^2} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + x - 2}{2 - x - 3x^2} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2(x+2)(x-1)}{3(x+1)(x-\frac{2}{3})} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-\frac{2}{3})(x-1) \leq 0 \quad ; x \neq -1 \wedge x \neq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

En virtud al método reducido, los valores de x que satisfacen la inecuación pertenecen al conjunto

$$]-2, -1[\cup \left] \frac{2}{3}, 1[.$$

Intersectando con la condición $x < 2$, se tiene

$$S_{II} \equiv]-2, -1[\cup \left] \frac{2}{3}, 1[.$$

Finalmente la unión de S_I y S_{II} es la solución de la inecuación

$$S_F = S_I \cup S_{II} =]-2, -1[\cup \left] \frac{2}{3}, 1[$$

Problema 3. Resuelva $x + 1 \leq \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ (20 pts.)

Las cantidades subradicales deben satisfacer (simultáneamente) las siguientes condiciones

- $x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$
- $x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3$

Así, la condición general de la inecuación es la intersección de estas, a saber, $x > 3$. Además, $x + 1 > 0$ para $x > 3$, entonces

$$\begin{aligned} x + 1 \leq \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} &\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x-3} \leq \sqrt{x+1} \quad /()^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2(x-3) \leq x+1 \\ &\Leftrightarrow (x+1)[(x+1)(x-3) - 1] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 4) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - (1 - \sqrt{5}))(x - (-1))(x - (1 + \sqrt{5})) \leq 0 \end{aligned}$$

En virtud al método reducido, los valores de x que satisfacen la inecuación pertenecen al conjunto

$$\left] -\infty, 1 - \sqrt{5} \right] \cup \left[-1, 1 + \sqrt{5} \right].$$

Intersectando con la condición general se obtiene la solución final, que es

$$S_F = \left] 3, 1 + \sqrt{5} \right]$$