Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Segundo Semestre 2012

CONTROL II (versión A)

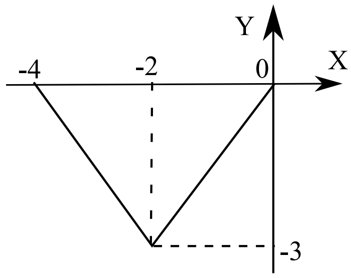
Problema 1. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$, con $Dom\, f = [-4, 0]$ y $Rec\, f = [-3, 0]$. Si h es la función definida por $h(x) = f(1-x)$, determine:

(1.1) Una expresión para $h(x)$ (7 pts.)

(1.2) $h(2)$ y $h(\frac{9}{2})$ (3 pts.)

(1.3) $Dom\, h$ y $Rec\, h$ (5 pts.)

(1.4) Gráfico de h (5 pts.)



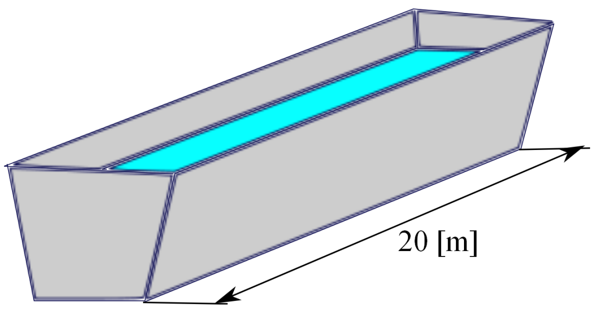
Problema 2. Considere la sucesión $(a_n;\ n \geq 1)$, definida por:

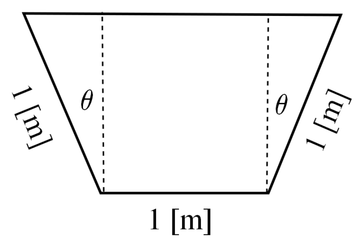
$$a_1 = \sqrt{1}; \quad a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}; \quad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}; \quad a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}; \ldots$$

(2.1) Exprese a_{n+1} en función de a_n, para todo $n \geq 1$ (5 pts.)

(2.2) Asuma que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (existe). Calcule el valor de L (15 pts.)

Problema 3. El abrevadero de la figura se debe construir según las dimensiones que se indican.





(3.1) Determine el volumen del abrevadero (en función de θ), llámele $V(\theta)$ (11 pts.)

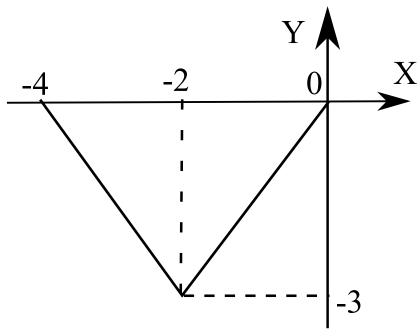
(3.2) ¿Cuál es el dominio de $V(\theta)$? (2 pts.)

(3.3) Calcule $V(\frac{\pi}{6})$, $V(\frac{\pi}{4})$, $V(\frac{\pi}{8})$ (3 pts.)

(3.4) ¿$V(\theta)$ es creciente en su dominio? ¿$V(\theta)$ es decreciente en su dominio? (4 pts.)

PAUTA CONTROL II (versión A)

Problema 1. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$, con $Dom\, f = [-4, 0]$ y $Rec\, f = [-3, 0]$. Si h es la función definida por $h(x) = f(1-x)$, determine:



(1.1) Una expresión para $h(x)$ (7 pts.)

La función $f(x)$ tiene la expresión analítica dada por $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(x+4) & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ \frac{3}{2}x & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$

Luego, la expresión pedida es $h(x) = f(1-x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(1-x+4) & \text{si} \quad -4 \leq 1-x \leq -2 \\ \frac{3}{2}(1-x) & \text{si} \quad -2 \leq 1-x \leq 0 \end{cases}$

Finalmente

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{3}{2}(x-5) & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(1.2) $h(2)$ y $h(\frac{9}{2})$ (3 pts.)

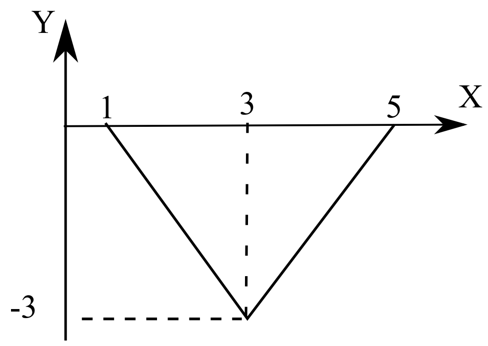
$$h(2) = \frac{3}{2}(1-2) = -\frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad h\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{2} - 5\right) = -\frac{3}{4}$$

(1.3) $Dom\, h$ y $Rec\, h$ (5 pts.)

En virtud a lo desarrollado en el item (1.1) y por la definición de h, tenemos que el dominio y el recorrido de h es

$$Dom\ h = [1, 5] \qquad \text{y} \qquad Rec\ h = [-3, 0]$$

(1.4) Gráfico de h (5 pts.)



Note que la función $h(x)$, define una traslación horizontal hacia la derecha, de la función $f(x)$.

Problema 2. Considere la sucesión $(a_n;\ n \geq 1)$, definida por:

$$a_1 = \sqrt{1}\,; \quad a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}\,; \quad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\,; \quad a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}\,; \ldots$$

(2.1) Exprese a_{n+1} en función de a_n, para todo $n \geq 1$ (5 pts.)

$a_1 = \sqrt{1} = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, $n \geq 1$.

(2.2) Asuma que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (existe). Calcule el valor de L (15 pts.)

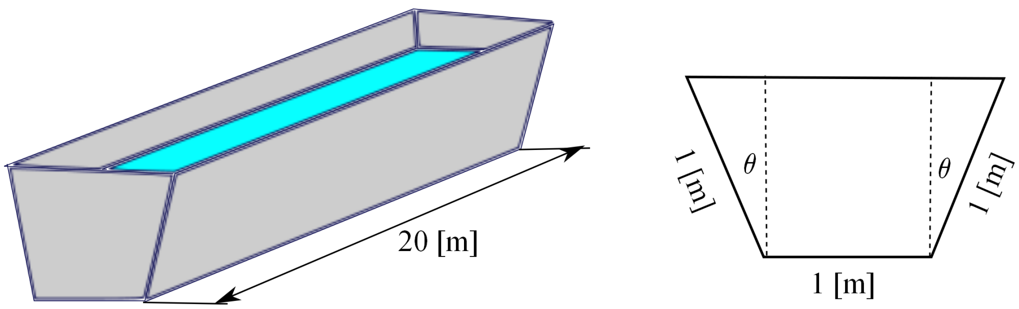
Asumiendo que el limite existe, lo denotamos por, L, entonces

$$\begin{aligned} L = \sqrt{1+L} \quad &\Longrightarrow \quad L^2 = 1 + L \\ &\Longleftrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad L = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

De la definición de la sucesión, se observa que $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo tanto el limite es

$$L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Problema 3. El abrevadero de la figura se debe construir según las dimensiones que se indican.



(3.1) Determine el volumen del abrevadero (en función de θ), llámele $V(\theta)$ (11 pts.)

Para obtener el volumen, determinemos el área de la sección transversal, área que corresponde a la de un trapecio de bases $a = 1$, $b = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$, y altura $h = \cos\theta$. Dicha área se obtiene con la formula $A = \dfrac{1}{2}(a+b)h$. Así, el área es $A(\theta) = \dfrac{1}{2}(2 + 2\operatorname{sen}\theta)\cos\theta$, o equivalentemente

$$A(\theta) = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta.$$

Finalmente el volumen del abrevadero (en $[m^3]$) es dado por

$$V(\theta) = 20(1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta$$

(3.2) ¿Cuál es el dominio de $V(\theta)$? (2 pts.)

El dominio es

$$Dom\ V = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

(3.3) Calcule $V(\frac{\pi}{6})$, $V(\frac{\pi}{4})$, $V(\frac{\pi}{8})$ (3 pts.)

Dado que: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos

$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = 20\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \qquad ; \qquad V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 10(1+\sqrt{2}) \; .$$

Ahora, usando las identidades del ángulo medio: $\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ y $\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, tenemos $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ y $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$V\left(\frac{\pi}{8}\right) = 5\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \; .$$

(3.4) ¿$V(\theta)$ es creciente en su dominio? ¿$V(\theta)$ es decreciente en su dominio? (4 pts.)

La función $V(\theta)$ no es creciente ni decreciente en su dominio, ya que, por ejemplo al evaluar en $\theta = 0$ se obtiene, $V(0) = 20$, sabemos que $V\left(\frac{\pi}{6}\right) = 15\sqrt{3} \approx 15 \cdot 1,7 = 25,5$, además $V(\frac{\pi}{4}) \approx 10(1+1,4) = 24$. Esto muestra que en el dominio la función no es monótona.

Obs: Se puede demostrar (fácilmente, con la derivada), que la función $V(\theta)$, es creciente en el intervalo $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ y decreciente en el intervalo $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$, obteniéndose el volumen máximo del abrevadero en el valor de $\theta = \frac{\pi}{6}$.