Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Segundo Semestre 2012

CONTROL II (versión B)

Problema 1. Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Si h es la función definida por $h(x) = f(f(x))$, determine:

(1.1) El gráfico de f (3 pts.)

(1.2) El conjunto $\{x \in [-2,2] : f(x) \geq 0\}$ y el conjunto $\{x \in [-2,2] : f(x) < 0\}$ (4 pts.)

(1.3) Una expresión para $h(x)$, $x \in [-2,2]$ (7 pts.)

(1.4) $Rec\, h$ y gráfico de h (6 pts.)

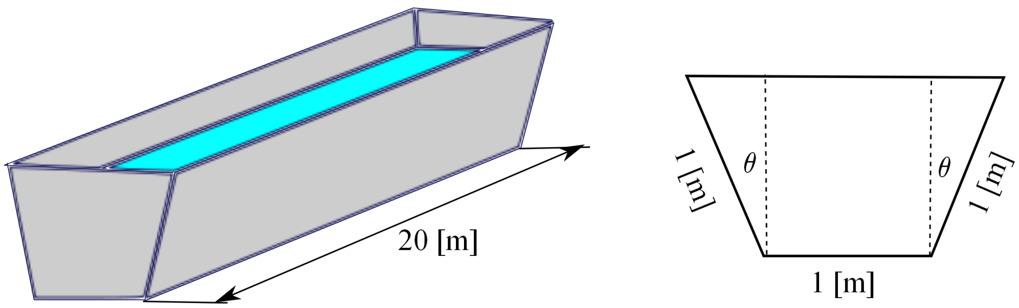
Problema 2. Considere la sucesión $(a_n;\ n \geq 1)$ definida por:

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 2 + \frac{1}{2}; \quad a_3 = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}; \quad a_4 = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}; \ldots$$

(2.1) Exprese a_{n+1} en función de a_n, para todo $n \geq 1$ (5 pts.)

(2.2) Asuma que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (existe). Calcule el valor de L (15 pts.)

Problema 3. El abrevadero de la figura se debe construir según las dimensiones que se indican.



(3.1) Determine el volumen del abrevadero (en función de θ), llámele $V(\theta)$ (11 pts.)

(3.2) ¿Cuál es el dominio de $V(\theta)$? (2 pts.)

(3.3) Calcule $V(\frac{\pi}{6})$, $V(\frac{\pi}{4})$, $V(\frac{\pi}{8})$ (3 pts.)

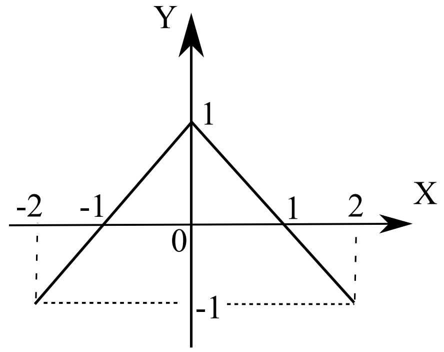
(3.4) ¿$V(\theta)$ es creciente en su dominio? ¿$V(\theta)$ es decreciente en su dominio? (4 pts.)

PAUTA CONTROL II (versión B)

Problema 1. Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Si h es la función definida por $h(x) = f(f(x))$, determine:

(1.1) El gráfico de f (3 pts.)



(1.2) El conjunto $\{x \in [-2,2] : f(x) \geq 0\}$ y el conjunto $\{x \in [-2,2] : f(x) < 0\}$ (4 pts.)

Del gráfico, se observa que

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\iff x \in [-1,1] \\ f(x) < 0 &\iff x \in [-2,1[\, \cup\,]1,2] \end{aligned}$$

Otra forma de obtener los conjuntos pedidos es:

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\iff \Big(x+1 \geq 0 \ \wedge\ x \in [-2,0[\Big) \ \cup\ \Big(1-x \geq 0 \ \wedge\ x \in [0,2]\Big) \\ &\iff \Big(x \geq -1 \ \wedge\ x \in [-2,0[\Big) \ \cup\ \Big(1 \geq x \ \wedge\ x \in [0,2]\Big) \\ &\iff \Big(x \in ([-1,\infty[\, \cap\, [-2,0[\ )\Big) \ \cup\ \Big(x \in (]-\infty,1] \ \cap\ [0,2])\Big) \\ &\iff \Big(x \in [-1,0[\Big) \ \cup\ \Big(x \in [0,1]\Big) \\ &\iff x \in [-1,1] \ . \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\iff \Big(x+1 < 0 \ \wedge\ x \in [-2,0[\Big) \ \cup\ \Big(1-x < 0 \ \wedge\ x \in [0,2]\Big) \\ &\iff \Big(x < -1 \ \wedge\ x \in [-2,0[\Big) \ \cup\ \Big(1 < x \ \wedge\ x \in [0,2]\Big) \\ &\iff \Big(x \in (]-\infty,-1[\, \cap\, [-2,0[)\Big) \ \cup\ \Big(x \in (]1,\infty[\, \cap\, [0,2])\Big) \\ &\iff \Big(x \in [-2,-1[\Big) \ \cup\ \Big(x \in]1,2]\Big) \\ &\iff x \in [-2,-1[\, \cup\,]1,2] \ . \end{aligned}$$

(1.3) Una expresión para $h(x)$, $x \in [-2,2]$ (7 pts.)

Para obtener la expresión una de h, notemos que, f, se puede escribir en términos del valor absoluto como

$$f(x) = 1 - |x| \quad ; x \in [-2,2]$$

Luego

$$h(x) = f(f(x)) = 1 - |f(x)| = 1 - |1 - |x|| \quad ; x \in [-2, 2]$$

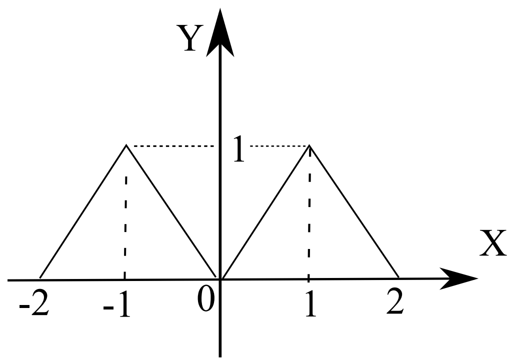
$$h(x) = \begin{cases} 1 - |1 + x| & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 - |1 - x| & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Finalmente

$$h(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(1.4) $Rec\, h$ y gráfico de h (6 pts.)

El gráfico de la función es



Y su recorrido es $Rec\ h = [0, 1]$.

Problema 2. Considere la sucesión $(a_n;\ n \geq 1)$ definida por:

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 2 + \frac{1}{2}; \quad a_3 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}; \quad a_4 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}; \ldots$$

(2.1) Exprese a_{n+1} en función de a_n, para todo $n \geq 1$ (5 pts.)

La sucesión se puede expresar por recurrencia como $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$, $n \geq 1$.

(2.2) Asuma que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ (existe). Calcule el valor de L (15 pts.)

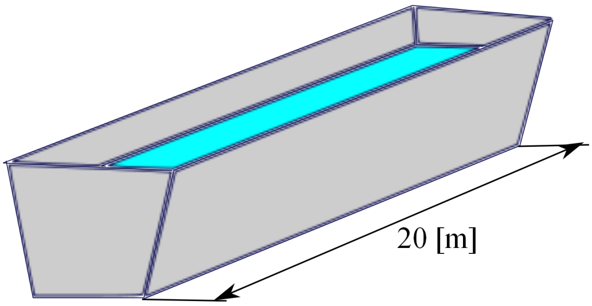
Asumiendo que el limite existe, lo denotamos por, L, entonces

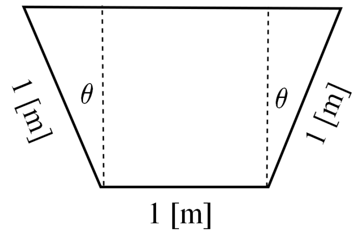
$$\begin{aligned} L = 2 + \frac{1}{L} \quad &\Longleftrightarrow \quad L^2 = 2L + 1 \quad , L \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad L^2 - 2L - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad L = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad L = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

De la definición de la sucesión, se observa que $a_n > 2$, $\forall\ n \geq 2$. Por lo tanto, el limite es

$$L = 1 + \sqrt{2}\ .$$

Problema 3. El abrevadero de la figura se debe construir según las dimensiones que se indican.





(3.1) Determine el volumen del abrevadero (en función de θ), llámele $V(\theta)$ (11 pts.)

Para obtener el volumen, determinemos el área de la sección transversa, área que corresponde a la de un trapecio de bases $a = 1$, $b = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$, y altura $h = \cos\theta$. Dicha área se obtiene con la formula $A = \dfrac{1}{2}(a+b)h$. Así, el área es $A(\theta) = \dfrac{1}{2}(2 + 2\operatorname{sen}\theta)\cos\theta$, o equivalentemente

$$A(\theta) = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta$$

Finalmente el volumen del abrevadero (en $[m^3]$) es dado por

$$V(\theta) = 20(1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta$$

(3.2) ¿Cuál es el dominio de $V(\theta)$? (2 pts.)

El dominio de para el volumen es

$$Dom\ V = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

(3.3) Calcule $V(\frac{\pi}{6})$, $V(\frac{\pi}{4})$, $V(\frac{\pi}{8})$ (3 pts.)

Dado que: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos

$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = 20\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \quad ; \quad V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 10(1 + \sqrt{2})\ .$$

Ahora, usando las identidades del ángulo medio: $\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ y $\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, tenemos $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ y $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$V\left(\frac{\pi}{8}\right) = 5\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(2 + \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\ .$$

(3.4) ¿$V(\theta)$ es creciente en su dominio? ¿$V(\theta)$ es decreciente en su dominio? (4 pts.)

La función $V(\theta)$ no es creciente ni decreciente en su dominio, ya que, por ejemplo al evaluar en $\theta = 0$ se obtiene, $V(0) = 20$, sabemos que $V\left(\frac{\pi}{6}\right) = 15\sqrt{3} \approx 15 \cdot 1,7 = 25,5$, además $V(\frac{\pi}{4}) \approx 10(1 + 1,4) = 24$. Esto muestra que en el dominio la función no es monótona.

Obs: Se puede demostrar (fácilmente, con la derivada), que la función $V(\theta)$, es creciente en el intervalo $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ y decreciente en el intervalo $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$, obteniéndose el volumen máximo del abrevadero en el valor de $\theta = \frac{\pi}{6}$.