Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencia, Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura Cálculo I, Módulo Básico Ingeniería, Segundo Semestre 2012

EXAMEN

Problema 1.

(1.1) Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$. Calcule $f'(0)$ **(7 pts.)**

(1.2) Considere la curva $x^3(y-1)^3 + (y-1)^2 = x + y - 1$.

(1.2.1) Determine y' en un punto (x, y) cualquiera **(5 pts.)**

(1.2.2) Encuentre la ecuación de la recta normal en el punto $(x, y) = (-1, 2)$ **(3 pts.)**

Problema 2. Un cliente le pide que diseñe un tanque de almacenamiento de gas líquido. Las especificaciones del cliente demandan un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos, el cual debe contener $8000[m^3]$ de gas. Además, el cliente quiere usar la menor cantidad posible de material en la construcción del tanque. ¿Qué radio y altura recomendaría para la porción cilíndrica del tanque? **(15 pts.)**

Problema 3. Los puntos A y B se mueven a lo largo de los ejes coordenados X e Y, respectivamente, de manera que la distancia **r** (en metros) a lo largo de la perpendicular desde el origen a la recta AB permanece constante. ¿Que tan rápido cambia OA cuando OB= $2r$ y B se mueve hacia O a una razón de $0,3\,r[\frac{m}{seg}]$? **(15 pts.)**

Problema 4. Una partícula se desplaza sobre una recta coordenada con velocidad $v(t) = e^{at}\,\text{sen}(bt)$, a y b constantes no nulas. Si la posición es igual a $2b$ cuando $t = 0$, determine $s(t)$, la posición de la partícula en el instante t **(15 pts.)**

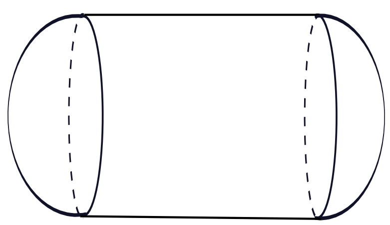


Figura Problema 2

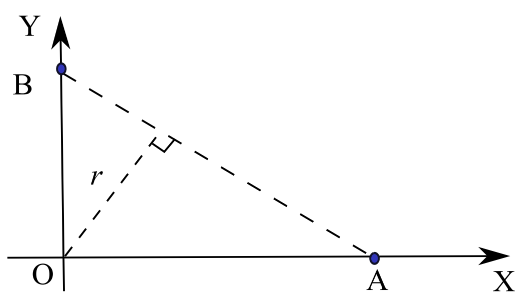


Figura Problema 3

PAUTA EXAMEN

Problema 1.

(1.1) Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$. Calcule $f'(0)$ **(7 pts.)**

Usando la definición de $f'(0)$ y regla de L'Höpital se obtiene que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h^{\frac{2}{3}}} = -\frac{3}{2}\lim_{h\to 0} h^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen} h = 0$$

(1.2) Considere la curva $x^3(y-1)^3 + (y-1)^2 = x + y - 1$.

(1.2.1) Determine y' en un punto (x, y) cualquiera **(5 pts.)**

Derivando implícitamente respecto de x, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^3(y-1)^3 + (y-1)^2 - y - x + 1) = 0 &\iff 3x^2(y-1)^3 + 3x^3(y-1)^2y' + \\
&\quad\; 2(y-1)y' - y' = 0 \\
&\iff y'(x,y) = \frac{1 - 3x^2(y-1)^3}{3x^3(y-1)^2 + 2(y-1) - 1}
\end{aligned}$$

(1.2.2) Encuentre la ecuación de la recta normal en el punto $(x, y) = (-1, 2)$ **(3 pts.)**

La pendiente de la recta tangente

$$y'(-1,2) = \frac{1 - 3(-1)^2(2-1)^3}{3(-1)^3(2-1)^2 + 2(2-1) - 1} = 1$$

La pendiente de la recta normal es por lo tanto, -1 , y la recta normal es $y - 2 = -(x+1)$.

Problema 2. Un cliente le pide que diseñe un tanque de almacenamiento de gas líquido. Las especificaciones del cliente demandan un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos, el cual debe contener $8000[m^3]$ de gas. Además, el cliente quiere usar la menor cantidad posible de material en la construcción del tanque. ¿Qué radio y altura recomendaría para la porción cilíndrica del tanque? **(15 pts.)**

El volumen del tanque debe ser fijo, es decir $V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 8000$, y la superficie, $A(r,h) = 2\pi r h + 4\pi r^2$, se debe optimizar para obtener el tanque solicitado. De la expresión del volumen, al despejar h, tenemos $h = \frac{8000}{\pi r^2} - \frac{4r}{3}$, por lo tanto

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{8000}{\pi r^2} - \frac{4r}{3}\right) + 4\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{16000}{r} + \frac{4\pi}{3}r^2$$

- Calculo de la primera derivada

$$A'(r) = -\frac{16000}{r^2} + \frac{8\pi}{3}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{6000}{\pi} \quad ; \quad r = \sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}}$$

- Calculo de la segunda derivada

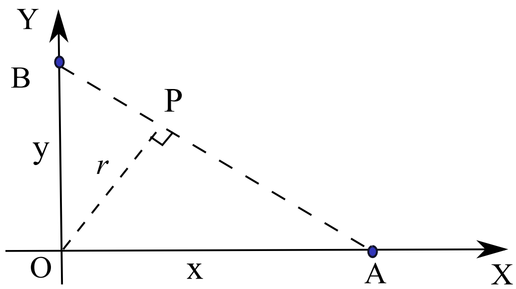
$$A''(r) = \frac{32000}{r^3} + \frac{8\pi}{3} > 0$$

Luego, existe un mínimo para A en $r = \sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}}$. Finalmente las dimensiones pedidas son:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}} \quad \text{y} \quad h = \frac{8000}{\pi r^2} - \frac{4r}{3}$$

Problema 3. Los puntos A y B se mueven a lo largo de los ejes coordenados X e Y, respectivamente, de manera que la distancia **r** (en metros) a lo largo de la perpendicular desde el origen a la recta AB permanece constante. ¿Que tan rápido cambia OA cuando OB= $2r$ y B se mueve hacia O a una razón de $0,3\,r[\frac{m}{seg}]$? **(15 pts.)**

Consideremos la figura siguiente



Podemos observar que, por semejanza de triángulos tenemos: $\dfrac{r}{x} = \dfrac{BP}{y}$, además $BP = \sqrt{y^2 - r^2}$, entonces $x = r \cdot \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - r^2}}$. Como r es constante, al derivar respecto al tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = r\left(\frac{\frac{dy}{dt} \cdot \sqrt{y^2 - r^2} - \frac{2y^2\ \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2-r^2}}}{y^2 - r^2}\right) = \frac{-r^3}{(y^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Como $y = OB = 2r$ y B se mueve hacia O, es decir, la razón es negativa: $\dfrac{dy}{dt} = -0,3\,r[\dfrac{m}{seg}]$, reemplazando tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-r^3}{((2r)^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-0,3r) = \frac{\sqrt{3}\ r}{30}[\frac{m}{seg}]$$

Problema 4. Una partícula se desplaza sobre una recta coordenada con velocidad $v(t) = e^{at}\,\text{sen}(bt)$, a y b constantes no nulas. Si la posición es igual a $2b$ cuando $t = 0$, determine $s(t)$, la posición de la partícula en el instante t **(15 pts.)**

Sea , $s(t)$, la posición de la partícula en el instante t, sabemos que

$$\frac{d\ s(t)}{dt} = v(t) = e^{at}\,\text{sen}(bt) \quad \Rightarrow \quad s(t) = \int e^{at}\,\text{sen}(bt)\ dt$$

Integramos por partes para obtener la posición.

$u = \text{sen}(bt) \ \Rightarrow \ du = b\cos(bt)\ dt$

$dv = e^{at}\ dt \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{e^{at}}{a}$

$$s(t) = \frac{e^{at}\,\text{sen}(bt)}{a} - \frac{b}{a}\int e^{at}\cos(bt)\ dt$$

Nuevamente integramos por partes.

$u = \cos(bt) \ \Rightarrow \ du = -b\,\text{sen}(bt)\ dt$

$dv = e^{at}\ dt \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{e^{at}}{a}$

$$s(t) = \frac{e^{at}\,\text{sen}(bt)}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{e^{at}\cos(bt)}{a} + \frac{b}{a}\int e^{at}\,\text{sen}(bt)\ dt\right)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{e^{at}\,\text{sen}(bt)}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{e^{at}\cos(bt)}{a} + \frac{b}{a}s(t)\right) \\ &= \frac{e^{at}\,\text{sen}(bt)}{a} - \frac{be^{at}\cos(bt)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}s(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s(t)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) &= \frac{e^{at}\,\text{sen}(bt)}{a} - \frac{be^{at}\cos(bt)}{a^2} \\ \Rightarrow \quad s(t) &= \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{e^{at}\,\text{sen}(bt)}{a} - \frac{be^{at}\cos(bt)}{a^2}\right) \end{aligned}$$

$$s(t) = e^{at}\left(\frac{a\,\text{sen}(bt)}{a^2+b^2} - \frac{b\cos(bt)}{a^2+b^2}\right) + C$$

Con la condición inicial tenemos: $s(0) = \frac{-b}{a^2+b^2} + C = 2b \quad \Rightarrow \quad C = \frac{b(2a^2+2b^2+1)}{a^2+b^2}$.

$$s(t) = e^{at}\left(\frac{a\,\text{sen}(bt)}{a^2+b^2} - \frac{b\cos(bt)}{a^2+b^2}\right) + \frac{b(2a^2+2b^2+1)}{a^2+b^2} \quad \blacksquare$$