Prueba Acumulativa (PA)

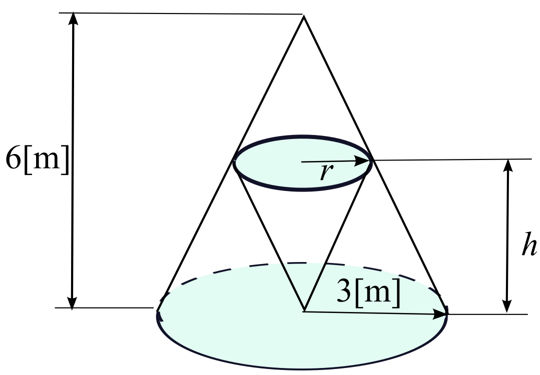
Problema 1. La recta que es normal a la curva $5(x-1)^2+6(x-1)y+5y^2=1$ en $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$, ¿en qué otro punto intersecta a la curva? (**15 pts.**)

Problema 2. Sea $L(t)$ la longitud de un alambre de cobre a t^{o} Celsius de temperatura. Si $L(0)=100[cm]$ y

$$L(t)=L_0(1+0{,}16\times 10^{-4}t+0{,}10\times 10^{-7}t^2),$$

encuentre la tasa de cambio del área encerrada por un triángulo equilátero hecho con el alambre de cobre, con respecto a la temperatura, cuando $t=22^{o}$ (**15 pts.**)

Problema 3. La figura siguiente muestra dos conos circulares rectos, uno boca abajo dentro del otro. Las dos bases son paralelas y el vertice del cono menor está en el centro de la base del cono mayor ¿Qué valores de r y h darán al cono menor el mayor volumen posible? (**15 pts.**)



Problema 4. Determine la curva $y=f(x)$ en el plano XY que pasa por el punto $(\sqrt[3]{2},e^2-3)$, y cuya pendiente de la recta tangente en cada punto (x,y) es $x^5e^{x^3}$ (**15 pts.**)

PAUTA

Problema 1. La recta que es normal a la curva $5(x-1)^2 + 6(x-1)y + 5y^2 = 1$ en $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, ¿en qué otro punto intersecta a la curva? (**15 pts.**)

Derivando implícitamente respecto de x, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5(x-1)^2 + 6(x-1)y + 5y^2 - 1) = 0 &\iff 10(x-1) + 6y + 6(x-1)y' + 10y \cdot y' = 0 \\ &\iff y'(x,y) = -\frac{10(x-1)+6y}{6(x-1)+10y}\end{aligned}$$

Reemplazando el punto $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ en la derivada, obtenemos la pendiente de la recta tangente.

$$y'\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{10(\frac{3}{2}-1) + 6(-\frac{1}{2})}{6(\frac{3}{2}-1) + 10(-\frac{1}{2})} = 1$$

La pendiente de la recta normal es por lo tanto, -1 , y la recta normal es $y + \frac{1}{2} = -\big(x - \frac{3}{2}\big)$ o equivalentemente $y = -(x-1)$. Ahora, los puntos de intersección los obtenemos al resolver el sistema dado por

$$5(x-1)^2 + 6(x-1)y + 5y^2 = 1 \quad \wedge \quad y = -(x-1)$$

Entonces

$$\begin{aligned}5(x-1)^2 + 6(x-1)\big(-(x-1)\big) + 5\big(-(x-1)\big)^2 = 1 &\iff 5(x-1)^2 - 6(x-1)^2 + 5(x-1)^2 = 1 \\ &\iff 4(x-1)^2 = 1 \\ &\iff (x-1)^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff x - 1 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x - 1 = -\frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, además del punto $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, se intersectan en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Problema 2. Sea $L(t)$ la longitud de un alambre de cobre a t° Celsius de temperatura. Si $L(0) = 100[cm]$ y

$$L(t) = L_0(1 + 0{,}16 \times 10^{-4}t + 0{,}10 \times 10^{-7}t^2),$$

encuentre la tasa de cambio del área encerrada por un triángulo equilátero hecho con el alambre de cobre, con respecto a la temperatura, cuando $t = 22^{\circ}$ (**15 pts.**)

Al formar un triángulo equilátero con el alambre, se tiene que, el perímetro a una cierta temperatura, t°Celsius , es precisamente la longitud, es decir

$$L(t) = 3b(t),$$

donde $b(t)$ es el lado del triángulo a t°Celsius. De aquí tenemos que $b(t) = \dfrac{L(t)}{3}$. Pero, la altura de este triángulo equilátero es $h(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b(t)$, por lo tanto, el área del triángulo en función de la temperatura es

$$A(t) = \frac{b(t) \cdot h(t)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, b^2(t) = \frac{\sqrt{3}}{36}\, L^2(t).$$

Ahora, la tasa de cambio pedida, se obtiene al derivar el área respecto a la temperatura, t, y luego evaluar en el instante en que la temperatura alcanza el valor de 22°Celsius.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=22^{\circ}} &= \frac{\sqrt{3}}{18}\, L(t) \cdot L'(t)\, \Big|_{t=22^{\circ}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{18} L(22) \cdot L'(22) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{18}\, 100(1 + 0{,}16 \times 10^{-4} \cdot 22 + 0{,}10 \times 10^{-7} \cdot 22^2)[cm] \cdot L'(22) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{18} 100,0357[cm] \cdot L'(22)
\end{aligned}$$

Además,

$$L'(t) = 100\left(0{,}16 \times 10^{-4} + 0{,}20 \times 10^{-7}t\right),$$

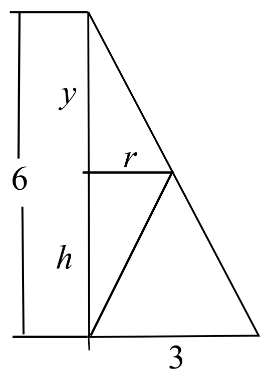
de donde

$$L'(22^{\circ}) = 100\left(0{,}16 \times 10^{-4} + 0{,}20 \times 10^{-7} \cdot 22\right) = 164,4 \times 10^{-5}\left[\frac{cm}{^{\circ}C}\right].$$

Finalmente

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=22^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot 100{,}0357 \cdot \left(164,4 \times 10^{-5}\right)\ \left[\frac{cm^2}{^{\circ}C}\right] = \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot 0,1645\ \left[\frac{cm^2}{^{\circ}C}\right].$$

Problema 3. La figura siguiente muestra dos conos circulares rectos, uno boca abajo dentro del otro. Las dos bases son paralelas y el vertice del cono menor está en el centro de la base del cono mayor ¿Qué valores de r y h darán al cono menor el mayor volumen posible? (**15 pts.**)



La función a optimizar es el volumen del cono interior $V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

Las cantidades r e y (ver figura) se relacionan mediante triángulos semejantes verificando la relación: $\frac{y}{r} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 2r$. Por lo tanto, la relación entre r y h es:

$$h = 6 - y = 6 - 2r$$

El volumen en función de r es

$$V(r) = 2\pi r^2 - \frac{2\pi}{3} r^3$$

Derivando e igualando a cero

$$V'(r) = 4\pi r - 2\pi r^2$$

$$\begin{aligned} (4\pi - 2\pi r)r = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad r = 0 \quad \vee \quad r = 2 \\ &\Longrightarrow \quad r = 2 \end{aligned}$$

La segunda derivada es

$$V''(r) = 4\pi - 4\pi r$$

Evaluando en $r = 2$: $V''(2) = 4\pi - 8\pi = -4\pi < 0$. Por el criterio de la segunda derivada para máximos y/o mínimos, en $r = 2$ y $h = 2$, se obtiene el volumen máximo requerido.

Problema 4. Determine la curva $y = f(x)$ en el plano XY que pasa por el punto $(\sqrt[3]{2}, e^2 - 3)$, y cuya pendiente de la recta tangente en cada punto (x, y) es $x^5 e^{x^3}$ **(15 pts.)**

Se pide la ecuación de la curva, $f(x)$, que satisface, $f'(x) = x^5 e^{x^3}$, para esto integramos:

$$f(x) = \int x^5 e^{x^3}\ dx = \int x^2 \cdot x^3 e^{x^3}\ dx$$

Utilizando la sustitución $t = x^3 \implies dt = 3x^2\ dx$, entonces

$$f(t) = \frac{1}{3}\int t\ e^t\ dt$$

Integrando por partes

$u = t \ \Rightarrow\ du = dt$

$dv = e^t\ dt \quad \Rightarrow \quad v = e^t$

$$f(t) = \frac{1}{3}\left(te^t - \int e^t\ dt\right) = \frac{1}{3}\left(te^t - e^t\right) + C$$

Así,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 e^{x^3} - e^{x^3}\right) + C.$$

Finalmente, desde la relación $f(\sqrt[3]{2}) = e^2 - 3$, se obtiene que $C = \frac{2}{3}e^2 - 3$. $\blacksquare$