PEP I

Problema 1.

(1.1) Un punto x se escoge desde el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$. Suponga que $f(x)$ representa la menor de las longitudes de los intervalos $[\frac{1}{2}, x]$ y $[x, \frac{5}{6}]$. Determine: $f(x)$, como función de x, su gráfica y su recorrido (**8 pts.**)

(1.2) Sea g la función definida por $g(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad -4 \le x \le -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

Si h es la función definida por $h(x) = g(g(x))$, determine:

a) El gráfico de g (**2 pts.**)

b) Los conjuntos $\{x \in [-4, 2] : g(x) \in]1, 2[\}$; $\{x \in [-4, 2] : -1 < g(x) \le 1\}$ y el conjunto $\{x \in [-4, 2] : g(x) = -1\}$. Para su respuesta basta que use a) (**4 pts.**)

c) Una expresión para $h(x)$, $x \in [-4, 2]$ (**4 pts.**)

d) $Rec\, h$ y gráfico de h (**2 pts.**)

Problema 2.

(2.1) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2 \cot 3x}$; $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]}{x}$ (**10 pts.**)

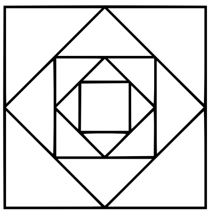
(2.2) Sea $f: \ Dom\, f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1-x}} & \text{si} \quad x < 1 \\ ax+b & \text{si} \quad 1 \le x \le \pi \\ \frac{\operatorname{sen} 3x}{\pi - x} & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$

a) Determine el dominio de f (**3 pts.**)

b) Encuentre los valores de a y b para que f sea continua en 1 y en π (**7 pts.**)

Problema 3.

(3.1) La siguiente figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión de cuadrados.



El cuadrado exterior tiene **c** metros de perímetro. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de lodos los lados del cuadrado anterior. Calcule S_n, la suma de los perímetros de los **n** primeros cuadrados de la sucesión y luego calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ (**10 pts.**)

(3.2) Considere la sucesión $(a_n, \ n \ge 1)$ definida recursivamente por: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, para todo $n \ge 2$. Inductivamente se puede demostrar que, para todo $n \ge 2$, $1 < a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Demuestre que, para todo $n \ge 1$, $a_n^2 - a_n - 1 < 0$ (**3 pts.**)

b) Demuestre que la sucesión $(a_n, \ n \ge 1)$ es creciente (**3 pts.**)

c) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ (**4 pts.**)

PAUTA PEP I

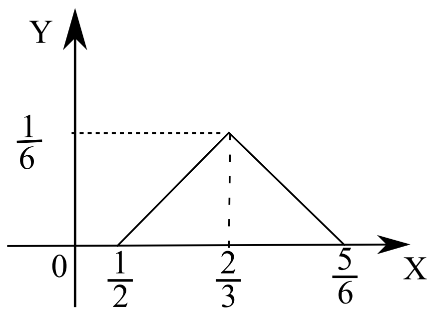
Problema 1.

(1.1) Un punto x se escoge desde el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$. Suponga que $f(x)$ representa la menor de las longitudes de los intervalos $[\frac{1}{2}, x]$ y $[x, \frac{5}{6}]$. Determine $f(x)$ como función de x, dibuje la gráfica de f y determine su recorrido (**8 pts.**)

Una forma de escribir la función es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \\ \\ \frac{5}{6} - x & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{6} \end{cases}$$

Su gráfico es



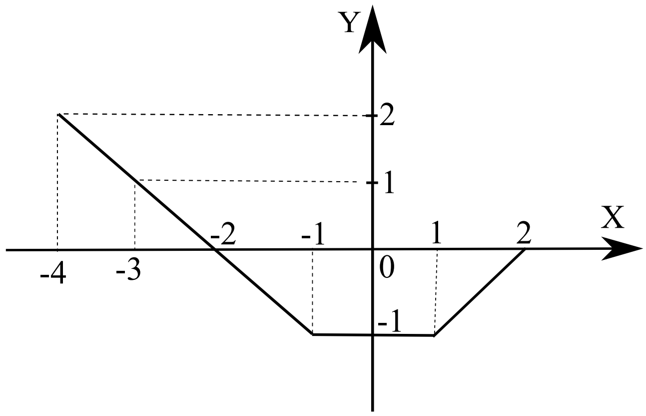
Su recorrido es

$$Rec\ f = \left[0, \frac{1}{6}\right]$$

(1.2) Sea g la función definida por $g(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si} & -4 \leq x \leq -1 \\ -1 & \text{si} & -1 < x \leq 1 \\ x-2 & \text{si} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Si h es la función definida por $h(x) = g(g(x))$, determine:

a) El gráfico de g (**2 pts.**)



b) Los conjuntos $\{x \in [-4,2] : g(x) \in]1,2[\}$; $\{x \in [-4,2] : -1 < g(x) \leq 1\}$ y el conjunto $\{x \in [-4,2] : g(x) = -1\}$. Para su respuesta basta que use a) (**4 pts.**)

$$\{x \in [-4,2] : g(x) \in]1,2[\} =]-4,-3[$$

$$\{x \in [-4,2] : -1 < g(x) \leq 1\} = [-3,-1[\cup]1,2]$$

$$\{x \in [-4,2] : g(x) = -1\} = [-1,1]$$

c) Una expresión para $h(x)$, $x \in [-4,2]$ (**4 pts.**)

$$h(x) = \begin{cases} -g(x) - 2 & \text{si} \quad -4 \leq g(x) \leq -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 < g(x) \leq 1 \\ g(x) - 2 & \text{si} \quad 1 < g(x) \leq 2 \end{cases}$$

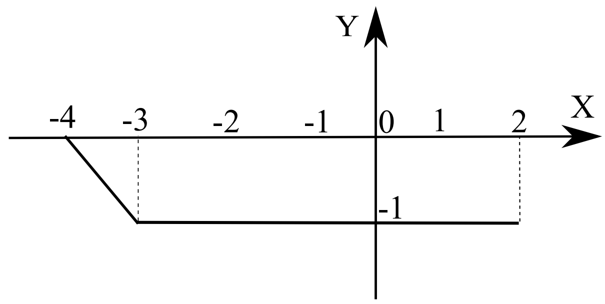
En virtud al item anterior, tenemos:
$\{x \in [-4,2] : -4 \leq g(x) \leq -1\} = \{x \in [-4,2] : g(x) = -1\} = [-1,1]$.

$$h(x) = \begin{cases} -g(x) - 2 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ -1 & \text{si} \quad x \in \big([-3,-1[\cup]1,2]\big) \\ g(x) - 2 & \text{si} \quad x \in [-4,-3[\end{cases}$$

Finalmente

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in [-3,2] \\ -x - 4 & \text{si} \quad x \in [-4,-3[\end{cases}$$

d) $Rec\,h$ y gráfico de h (**2 pts.**)



Su recorrido es

$$Rec\ h = [-1,0]$$

Problema 2.

(2.1) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2 \cot 3x}$; $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]}{x}$ (**10 pts.**)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2 \cot 3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} 3x}{x^2 \cos x \ \cos 3x} \\ &= 3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x \ \cos 3x} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Recordemos que: Dado $x \in \mathbb{R}$, la función parte entera, denotada por $[x]$, se de define como el mayor entero menor o igual que x, entonces, si $z \in \mathbb{Z}$ y $z \leq x < z+1$, entonces $[x] = z$.

Como x tiende a 3 por la izquierda, tenemos que $2 \leq x < 3$, luego , en este caso $[x] = 2$, así

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3^-} \frac{[x]}{x} &= \lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(2.2) Sea $f:\ Dom\ f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1-x}} & \text{si} \quad x < 1 \\ ax+b & \text{si} \quad 1 \leq x \leq \pi \\ \frac{\operatorname{sen} 3x}{\pi - x} & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$

a) Determine el dominio de f (**3 pts.**)

El dominio lo obtenemos, al analizar las cantidades subradicales, ya que, deben satisfacer (simultáneamente) las siguientes condiciones

- $x+3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3$
- $3x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{3}$
- $1-x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$

Las tres condiciones anteriores se cumplen si $x \in \left[-\frac{1}{3}\ ,\ 1\right[$

Por lo tanto, concluimos que el dominio de la función es:

$$Dom\ f = \left[-\frac{1}{3}\ ,\ +\infty\right[$$

b) Encuentre los valores de a y b para que f sea continua en 1 y en π (**7 pts.**)

La función es continua en todo su dominio (excepto en 1 y π) por ser combinación de funciones continuas. El análisis de continuidad en los puntos 1 y π, es mediante limites laterales:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{2(1-x)}{\sqrt{1-x}\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 1^+} ax+b \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = a+b$$

Ahora, calculamos usando el cambio de variables $t = \pi - x$, entonces, $t \to 0^+$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\pi - x} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 3(\pi - t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t} \\
&= 3 \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 3t}{3t} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Luego

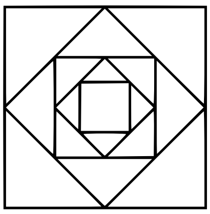
$$
\lim_{x\to\pi^-} ax + b = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\pi - x} \quad \Longleftrightarrow \quad a\pi + b = 3
$$

Resolviendo el sistema para a y b obtenemos:

$$
a = \frac{3}{\pi - 1} \quad ; \quad b = -\frac{3}{\pi - 1}
$$

Problema 3.

(3.1) La siguiente figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión de cuadrados.



El cuadrado exterior tiene **c** metros de perímetro. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de lodos los lados del cuadrado anterior. Calcule S_n, la suma de los perímetros de los **n** primeros cuadrados de la sucesión y luego calcule $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ **(10 pts.)**

Sea $L = \frac{c}{4}$ el lado del primer cuadrado. Los lados de los primeros 5 cuadrados son :

$$
L_1 = L \ , \ L_2 = \frac{L}{\sqrt{2}} \ , \ L_3 = \frac{L}{(\sqrt{2})^2} \ , \ L_4 = \frac{L}{(\sqrt{2})^3} \ , \ L_5 = \frac{L}{(\sqrt{2})^4}
$$

Entonces la suma de los perímetros es:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 4\left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + \cdots + L_n\right) \\
&= 4\left(L + \frac{L}{\sqrt{2}} + \frac{L}{(\sqrt{2})^2} + \frac{L}{(\sqrt{2})^3} + \cdots + \frac{L}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right) \\
&= 4L\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right) \\
&= c\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
S_n = c\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right].
$$

Por lo tanto,

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = c\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right] = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.
$$

(3.2) Considere la sucesión $(a_n,\ n \geq 1)$ definida recursivamente por: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, para todo $n \geq 2$. Inductivamente se puede demostrar que, para todo $n \geq 2$, $1 < a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Demuestre que, para todo $n \geq 1$, $a_n^2 - a_n - 1 < 0$ (**3 pts.**)

Notar que $a_n^2 - a_n - 1 < 0$ equivale a $\left(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$.

Como $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, entonces $\left(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$. Además $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, o sea $-\frac{1-\sqrt{5}}{2} > 0$. También $1 < a_n$, por lo que $\left(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0$.

En conclusión $\left(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$.

b) Demuestre que la sucesión $(a_n,\ n \geq 1)$ es creciente (**3 pts.**)

Debemos probar que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{1+a_n}}{a_n} \geq 1$. Esto equivale a probar que $\sqrt{1+a_n} \geq a_n$. Para esto basta probar que $1 + a_n \geq a_n{}^2$, es decir, basta probar que $a_n^2 - a_n - 1 < 0$, lo que se cumple por la parte a).

c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (**4 pts.**)

Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Entonces

$$\begin{aligned} L = \sqrt{1+L} \quad &\Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \vee \ L = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Como los a_n son positivos y la sucesión es creciente, entonces $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.