PEP II

Problema 1.

(1.1) Encuentre el(los) punto(s) de la curva dada por la ecuación $y^2 = x^3$, donde la recta $y = -\frac{1}{3}x + b$ es normal. Además, calcule el valor de b (**7 pts.**)

(1.2) Determine la recta normal a la curva dada por la ecuación $x\,\mathrm{sen}(2y) = y\cos(2x)$, en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (**8 pts.**)

Problema 2. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(2.1) Verifique que $f'(x) = -\dfrac{1}{16}(x-3)f(x)$ y $f''(x) = -\dfrac{1}{16}\left(1 - \dfrac{1}{16}(x-3)^2\right)f(x)$ (**4 pts.**)

(2.2) Encuentre intervalos de crecimiento y de concavidad (**3 pts.**)

(2.3) Determine máximos y/o mínimos y puntos de inflexión (**4 pts.**)

(2.4) Determine asíntotas y bosqueje la gráfica de f (**4 pts.**)

Problema 3. Una escalera de 10[m] de largo está apoyada sobre el muro exterior de un edificio cuando su base comienza a deslizarse (ver figura 1). En el instante en que la base está a 8[m] del edifico, la base se mueve a una tasa de $2[\frac{m}{s}]$.

(3.1) ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo? (**7 pts.**)

(3.2) En ese instante, ¿con que tasa cambia el ángulo θ entre la escalera y el suelo? (**8 pts.**)

Problema 4. Un cliente le pide que diseñe una caja rectangular abierta (sin tapa) de acero (ver figura 2). Esta debe tener base cuadrada y un volumen de $32[m^3]$, además, debe construirse con una plancha de un cuarto de pulgada y no tiene que pesar más de lo necesario ¿Qué dimensiones recomendaría? (**15 pts.**)

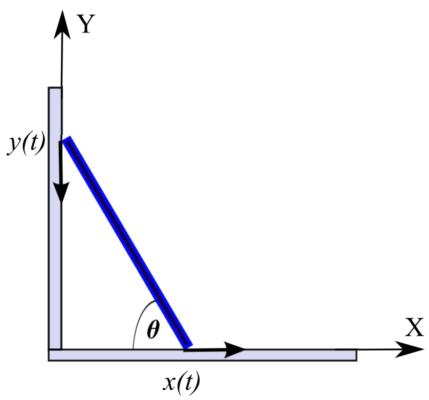


Figura 1

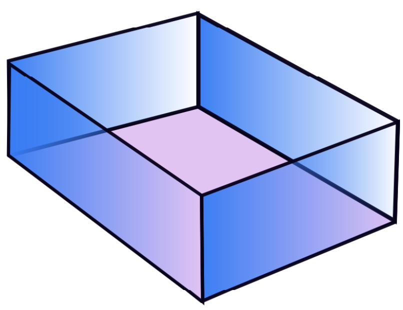


Figura 2

PAUTA PEP II

Problema 1.

(1.1) Encuentre el(los) punto(s) de la curva dada por la ecuación $y^2 = x^3$, donde la recta $y = -\frac{1}{3}x + b$ es normal. Además, calcule el valor de b (**7 pts.**)

Escribiendo y en función de x tenemos que $y = x^{\frac{3}{2}}$ o $y = -x^{\frac{3}{2}}$.

Por otro lado, se deduce que la pendiente de la recta tangente a la curva tiene un valor de 3. Derivando las ecuación respecto de x, tenemos: $y' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Ahora determinamos la coordenada x_0, tal que, $\pm\frac{3}{2}\sqrt{x_0} = 3$

- Si consideramos $y = x^{\frac{3}{2}}$: $\frac{3}{2}\sqrt{x_0} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x_0} = 2$, con lo que se obtiene $x_0 = 4$.
- Si consideramos $y = -x^{\frac{3}{2}}$: $-\frac{3}{2}\sqrt{x_0} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x_0} = -2$, que es una contradicción.

Así el punto buscado tiene coordenada $x_0 = 4$ e $y_0 = 4^{\frac{3}{2}} = 8$, es decir, $P(2, 8)$.

Finalmente, la ecuación de la recta normal es: $y - 8 = -\frac{1}{3}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{28}{3}$. Y concluimos que $b = \frac{28}{3}$.

(1.2) Determine la recta normal a la curva dada por la ecuación $x\,\mathrm{sen}(2y) = y\cos(2x)$, en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (**8 pts.**)

Calculamos la derivada(respecto a x) de la función implícita

$$\mathrm{sen}(2y) + 2y'x\cos(2y) = y'\cos(2x) - 2y\,\mathrm{sen}(2x) \Rightarrow y' = \frac{\mathrm{sen}(2y) + 2y\,\mathrm{sen}(2x)}{\cos(2x) - 2x\cos(2y)}$$

Evaluando en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, tenemos

$$y'\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathrm{sen}(\pi) + \pi\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}\cos(\pi)} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{2}$ y la ecuación de la recta normal es

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Problema 2. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(2.1) Verifique que $f'(x) = -\dfrac{1}{16}(x-3)f(x)$ y $f''(x) = -\dfrac{1}{16}\left(1 - \dfrac{1}{16}(x-3)^2\right)f(x)$ (**4 pts.**)

Calculo de la 1ª Derivada

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)^2\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)^2\right)\right]\cdot\left[-\frac{1}{2}2\left(\frac{x-3}{4}\right)\frac{1}{4}\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{16}(x-3)\right) \\
&= f(x)\cdot\left(-\frac{1}{16}(x-3)\right) \\
&= -\frac{1}{16}(x-3)f(x)
\end{aligned}$$

Calculo de la 2ª Derivada. Usando el resultado anterior se tiene:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{16}(x-3)f(x)\right] \\ &= -\frac{1}{16}\frac{d}{dx}\left[(x-3)f(x)\right] \\ &= -\frac{1}{16}\left[f(x)+(x-3)f'(x)\right] \\ &= -\frac{1}{16}\left\{f(x)+(x-3)\left[-\frac{1}{16}(x-3)f(x)\right]\right\} \\ &= -\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{16}(x-3)^2\right)f(x) \end{aligned}$$

(2.2) Encuentre intervalos de crecimiento y de concavidad **(3 pts.)**

Comentario previo: Ya que la función exponencial verifica que $\exp x > 0\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, claramente, $f(x) > 0\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{16}(x-3)f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Entonces, $x = 3$, es un posible máximo o mínimo para f. Si utilizamos el criterio de la 2ª derivada para máximos y/o mínimos, se tiene

$$f''(3) = -\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{16}(3-3)^2\right)f(3) = -\frac{1}{16}f(3) = -\frac{1}{16}\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} < 0$$

Luego, en $x = 2$, la función f tiene un máximo global.

Los candidatos a puntos de inflexión son los x tales que $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe. Como $f''(x)$ existe, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces estudiamos la ecuación.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{16}(x-3)^2\right)f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1-\frac{1}{16}(x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x-3 = \pm 4 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 7 \end{aligned}$$

En consecuencia, $x = -1$ y $x = 7$ son candidatos a punto de inflexión.

(2.3) Determine máximos y/o mínimos y puntos de inflexión **(4 pts.)**

Crecimiento de f. Determinemos el signo de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{16}(x-3)f(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow x-3 < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{16}(x-3)f(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow x-3 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto f es estrictamente creciente en el intervalo $]-\infty, 3[$ y estrictamente decreciente en el intervalo $]3, +\infty[$.

Concavidad de f. Determinemos el signo de $f''(x)$

$$\begin{aligned}
f''(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{16}(x-3)^2\right) f(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{16}(x-3)^2\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{16}(x-3)^2\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 16 - (x-3)^2 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]7, +\infty[
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{16}(x-3)^2\right) f(x) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{16}(x-3)^2\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{16}(x-3)^2\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 16 - (x-3)^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \,]-1, 7[
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es convexa en el intervalo $]-\infty, -1[\, \cup]7, +\infty[$ y cóncava en el intervalo $]-1, 7[$. Además concluimos que $x = -1$ y $x = 7$ son puntos de inflexión

(2.4) Determine asíntotas y bosqueje la gráfica de f (**4 pts.**)

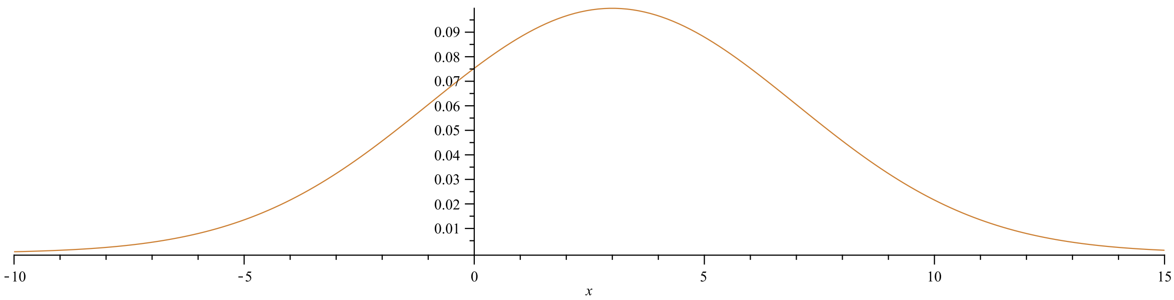
Asíntotas Verticales: No tiene, ya que, la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Asíntotas Horizontales: Calculemos los limites.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)^2\right) = 0$$

En consecuencia, la recta $y = 0$ es Asíntota Horizontal.

Gráfico de $f(x)$



Problema 3. Una escalera de 10[m] de largo está apoyada sobre el muro exterior de un edificio cuando su base comienza a deslizarse (ver figura 1). En el instante en que la base está a 8[m] del edifico, la base se mueve a una tasa de $2[\frac{m}{s}]$.

(3.1) ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo? (**7 pts.**)

De la geometría se tiene claramente que $x^2 + y^2 = 10^2$ derivando respecto al tiempo, tenemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Como $y = \sqrt{10^2 - x^2}$, en el instante en que $x = 8[m]$ se tiene que $y = 6[m]$, luego

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{6} \cdot 2\left[\frac{m}{s}\right] = -\frac{8}{3}\left[\frac{m}{s}\right]$$

(3.2) En ese instante, ¿con que tasa cambia el ángulo θ entre la escalera y el suelo? (**8 pts.**)

Calculando la tangente del ángulo, en el triángulo rectángulo que se forma en el movimiento, tenemos

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Derivando respecto al tiempo

$$\frac{d\theta}{dt}\sec^2\theta = \frac{\frac{dy}{dt}\cdot x - y \cdot \frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}\cdot x - y \cdot \frac{dx}{dt}}{x^2}\cos^2\theta$$

Reemplazando los valores

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\frac{8}{3}\cdot 8 - 6 \cdot 2}{8^2}\left(\frac{8}{10}\right)^2 = -\frac{1}{3}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Problema 4. Un cliente le pide que diseñe una caja rectangular abierta (sin tapa) de acero (ver figura 2). Esta debe tener base cuadrada y un volumen de $32[m^3]$, además, debe construirse con una plancha de un cuarto de pulgada y no tiene que pesar más de lo necesario ¿Qué dimensiones recomendaría? (**15 pts.**)

El volumen de la caja de base cuadrada de lado x y altura y debe satisfacer: $V = x^2y = 32$.

Por otro lado, para que ésta no pese mas de lo necesario" debemos minimizar la superficie total de la caja, es decir:

$$S(x,y) = \underbrace{4xy}_{\text{área 4 tapas leterales}} + \underbrace{x^2}_{\text{área base}}$$

De la expresión del volumen tenemos $y = \frac{32}{x^2}$, entonces $S(x) = 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2 = \frac{128}{x} + x^2$. Derivando

$$S'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 128}{x^2}$$

$$\begin{aligned} S'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^3 - 128 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^3 = 128 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 = 64 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 4 \end{aligned}$$

La segunda derivada es $S'(x) = \frac{256}{x^3} + 2$, evaluando en $x = 4$ tenemos $S''(4) = 6 > 0$, por lo tanto, en $x = 4$ tenemos un mínimo.

Finalmente las dimensiones recomendadas son $x = 4$ e $y = 2$.