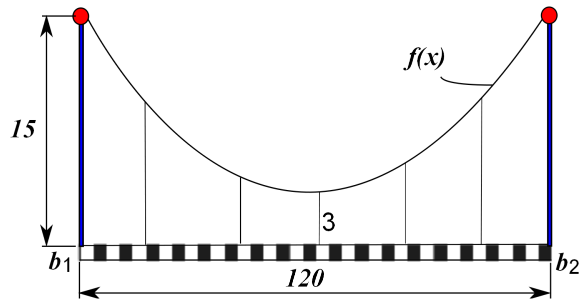
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

CONTROL II (versión A)

Problema 1. (20 pts.) El piso horizontal de un puente colgante está soportado por barras verticales unidas a un cable que tiene la forma de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Los extremos del cable están ligados a las partes superiores de dos torres, las cuales tienen sus bases b_1 y b_2 al nivel del piso del puente. Las alturas de ambas torres son de 15 $[m]$ y ellas están separadas a 120 $[m]$ una de la otra. Si el punto más bajo del cable está a 3 $[m]$ sobre el piso del puente, determinar la longitud de una barra de soporte situada a 10 $[m]$ de una de las torres (considerar la figura siguiente).



Problema 2. (20 pts.) Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{1-|x|}$. Encuentre:

(a) $Dom f$ y $Rec f$ (dominio y recorrido de f, respectivamente).

(b) $f^{-1}(\,]-\infty, 0[\,) = \{x \in Dom f : f(x) < 0\}$.

Problema 3. (20 pts.)

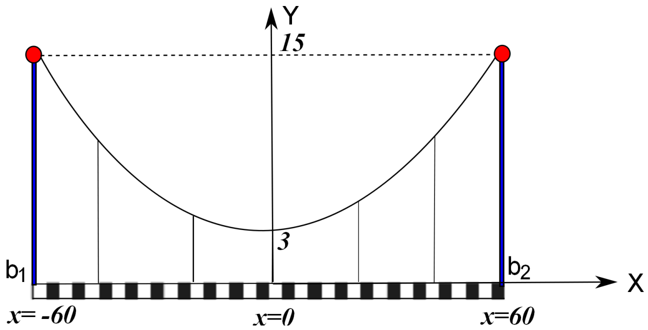
(a) La sucesión de números reales $(a_n;\, n \geq 0)$ está definida recursivamente por la relación $a_{n+1} = a_n \left(\dfrac{1 + a_{n-1}^2}{2}\right)$, $n \geq 2$. Asumiendo que para todo $n \geq 0$, $a_n \in]0, 1[$, demuestre que la sucesión $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente. Además calcule $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) Si $a < b$, ambos no nulos, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$.

PAUTA CONTROL II (versión A)

Problema 1. (20 pts.) El piso horizontal de un puente colgante está soportado por barras verticales unidas a un cable que tiene la forma de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Los extremos del cable están ligados a las partes superiores de dos torres, las cuales tienen sus bases b_1 y b_2 al nivel del piso del puente. Las alturas de ambas torres son de 15 $[m]$ y ellas están separadas a 120 $[m]$ una de la otra. Si el punto más bajo del cable está a 3 $[m]$ sobre el piso del puente, determinar la longitud de una barra de soporte situada a 10 $[m]$ de una de las torres.

Consideremos el sistema de coordenadas cartesiano XY (como se muestra en la figura).



La función $f(x)$ que describe el cable debe satisfacer las condiciones siguientes

- $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 3.$
- $f(60) = a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + 3 = 15 \quad \Rightarrow \quad 3600a + 60b + 3 = 15.$
- $f(-60) = a \cdot (-60)^2 + b \cdot (-60) + c = 15 \quad \Rightarrow \quad 3600a - 60b + 3 = 15.$

Combinando las ultimas dos expresiones se tiene que $7200a = 24 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{300}$ y luego $b = 0$. Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{300}\, x^2 + 3$$

Finalmente la longitud de una barra de soporte situada a 10 $[m]$ de una de las torres, corresponde a una posición axial $x = 50$ o $x = -50$. Así

$$f(50) = f(-50) = \frac{1}{300}\,(\pm 50)^2 + 3 = \frac{34}{3}$$

Problema 2. (20 pts.) Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{1 - |x|}$. Encuentre:

(a) *Domf* y *Recf* (dominio y recorrido de f, respectivamente).

$$f(x) = \frac{2x}{1-|x|} = \begin{cases} \frac{2x}{1-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{2x}{1+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La función define un número real si y solo si $1 - x \neq 0 \quad \wedge \quad 1 + x \neq 0$, es decir

$$x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq -1$$

Por lo tanto

$$Domf = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

El análisis del recorrido lo haremos por intervalos, como sigue

- Si $x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]-1, 0]$ tenemos que $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$, entonces:
  $y = \dfrac{2x}{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)y = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y}{2-y}$. Como en el intervalo considerado $x \leq 0$, entonces.

$$\begin{aligned} \frac{y}{2-y} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (y-0)(y-2) \geq 0 \quad ; \; y \neq 2 \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \,]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

- Si $x \in \,]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[$ tenemos que $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$, entonces:
  $y = \dfrac{2x}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)y = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y}{2+y}$. Como en el intervalo considerado $x < 0$, entonces.

$$\begin{aligned} \frac{y}{2+y} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (y-(-2))(y-0) > 0 \quad ; \; y \neq -2 \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]0, +\infty[\end{aligned}$$

En conclusión se tiene que

$$Recf = \mathbb{R}$$

(b) $f^{-1}(\,]-\infty, 0[\,) = \{x \in Domf : f(x) < 0\}$.

Debemos determinar el conjunto $\{x \in Domf : f(x) < 0\}$, en otras palabras debemos resolver la inecuación $f(x) < 0$. De lo anterior tenemos dos casos por estudiar:

- Caso $x < 0$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(1+x) < 0 \quad ; \; x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-(-1))(x-0) < 0 \quad ; \; x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \,]-1, 0[\end{aligned}$$

  Entonces

$$x \in \,]-\infty, 0[\, \cap \,]-1, 0[\qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \,]-1, 0[$$

$$S_1 = \,]-1, 0[$$

- Caso $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1-x} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(1-x) < 0 \quad ; \; x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-0)(x-1) > 0 \quad ; \; x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[\end{aligned}$$

  Entonces

$$x \in \; \big(]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[\big) \cap \,]0, +\infty[\qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \,]1, +\infty[$$

$$S_2 = \,]1, +\infty[$$

Finalmente la solución de la inecuación es dada por $S_F = S_1 \cup S_2$, así

$$f^{-1}(\,]-\infty, 0[\,) = \;]-1, 0[\; \cup \;]1, +\infty[\,.$$

Problema 3. (20 pts.)

(a) La sucesión de números reales $(a_n;\, n \geq 0)$ está definida recursivamente por la relación $a_{n+1} = a_n \left(\dfrac{1 + a_{n-1}^2}{2}\right)$, $n \geq 2$. Asumiendo que para todo $n \geq 0$, $a_n \in \,]0,1[$, demuestre que la sucesión $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente. Además calcule $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Probemos que la sucesión $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente. Para esto notemos que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{1 + a_{n-1}^2}{2}\right)$, $n \geq 2$. y como $a_n \in \,]0,1[$ tenemos que $a_n^2 \in \,]0,1[$, en consecuencia $a_{n-1}^2 \in \,]0,1[$ entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1 + a_{n-1}^2}{2}\right) < 1 \;,\; n \geq 2.$$

Que demuestra que $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente.

Cálculo del límite: Supongamos que el límite de la sucesión es L, entonces tenemos

$$L = L\left(\frac{1 + L^2}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2L = L + L^3 \quad \Leftrightarrow \quad L(L^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \in \{-1, 0, 1\}$$

Como $a_n \in \,]0,1[$ y además es decreciente el limite es $L = 0$.

(b) Si $a < b$, ambos no nulos, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b^n}{a \cdot a^n + b \cdot b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right)}{b^n\left(a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n + b\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}{a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n + b} = \frac{1}{b}$$