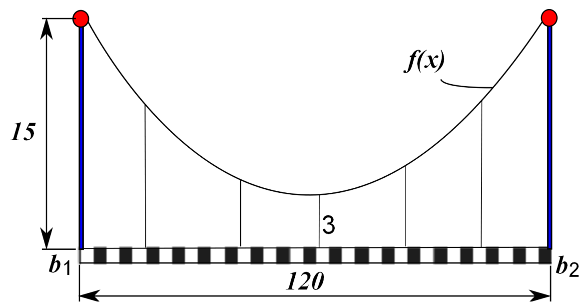
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

CONTROL II (versión B)

Problema 1. (20 pts.) El piso horizontal de un puente colgante está soportado por barras verticales unidas a un cable que tiene la forma de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Los extremos del cable están ligados a las partes superiores de dos torres, las cuales tienen sus bases b_1 y b_2 al nivel del piso del puente. Las alturas de ambas torres son de 15 $[m]$ y ellas están separadas a 120 $[m]$ una de la otra. Si el punto más bajo del cable está a 3 $[m]$ sobre el piso del puente, determinar la longitud de una barra de soporte situada a 20 $[m]$ de una de las torres (considerar la figura siguiente).



Problema 2. (20 pts.) Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - |x|}$. Encuentre:

(a) $Dom f$ y $Rec f$ (dominio y recorrido de f, respectivamente).

(b) $f^{-1}([0, \infty[) = \{x \in Dom f : f(x) \geq 0\}$.

Problema 3. (20 pts.)

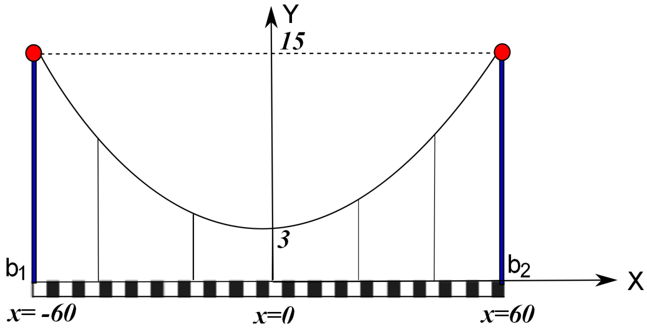
(a) La sucesión de números reales $(a_n;\, n \geq 0)$ está definida recursivamente por la relación $a_{n+1} = a_n \left(\dfrac{1 + a_{n-1}^2}{2} \right)$, $n \geq 2$. Asumiendo que para todo $n \geq 0$, $a_n \in\,]0, 1[$, demuestre que la sucesión $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente. Además calcule $L = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

(b) Si $a > b > 0$, ambos no nulos, calcule $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$.

PAUTA CONTROL II (versión B)

Problema 1. (20 pts.) El piso horizontal de un puente colgante está soportado por barras verticales unidas a un cable que tiene la forma de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Los extremos del cable están ligados a las partes superiores de dos torres, las cuales tienen sus bases b_1 y b_2 al nivel del piso del puente. Las alturas de ambas torres son de 15 $[m]$ y ellas están separadas a 120 $[m]$ una de la otra. Si el punto más bajo del cable está a 3 $[m]$ sobre el piso del puente, determinar la longitud de una barra de soporte situada a 20 $[m]$ de una de las torres.

Consideremos el sistema de coordenadas cartesiano XY (como se muestra en la figura).



La función $f(x)$ que describe el cable debe satisfacer las condiciones siguientes

- $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 3.$
- $f(60) = a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + 3 = 15 \quad \Rightarrow \quad 3600a + 60b + 3 = 15.$
- $f(-60) = a \cdot (-60)^2 + b \cdot (-60) + c = 15 \quad \Rightarrow \quad 3600a - 60b + 3 = 15.$

Combinando las ultimas dos expresiones se tiene que $7200a = 24 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{300}$ y luego $b = 0$. Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{300}\, x^2 + 3$$

Finalmente la longitud de una barra de soporte situada a 10 $[m]$ de una de las torres, corresponde a una posición axial $x = 40$ o $x = -40$. Así

$$f(40) = f(-40) = \frac{1}{300}\, (\pm 40)^2 + 3 = \frac{25}{3}$$

Problema 2. (20 pts.) Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - |x|}$. Encuentre:

(a) $Dom f$ y $Rec f$ (dominio y recorrido de f, respectivamente).

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - |x|} = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{x^2 + x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La función define un número real si y solo si $x^2 - x \neq 0 \quad \wedge \quad x^2 + x \neq 0$, es decir

$$x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -1$$

Por lo tanto

$$Domf = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

El análisis del recorrido lo haremos por intervalos como sigue $]-\infty, -1[$, , y $]1, +\infty[$

- Si $x \in\,]-\infty, -1[\, \cup\,]-1, 0[$ tenemos que $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x}$, entonces:
  $y = \dfrac{x}{x^2+x} \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+x)y = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1-y}{y}$. Como en el intervalo considerado $x < 0$, entonces.

$$\begin{aligned} \frac{1-y}{y} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (y-0)(y-1) > 0 \quad ; \; y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]1, +\infty[\end{aligned}$$

- Si $x \in\,]0, 1[\, \cup\,]1, +\infty[$ tenemos que $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x}$, entonces:
  $y = \dfrac{x}{x^2-x} \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-x)y = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1+y}{y}$. Como en el intervalo considerado $x > 0$, entonces.

$$\begin{aligned} \frac{1+y}{y} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (y-(-1))(y-0) > 0 \quad ; \; y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y \in\,]-\infty, -1[\, \cup\,]0, +\infty[\end{aligned}$$

En conclusión se tiene que

$$Recf = \mathbb{R} - \{0\}$$

(b) $f^{-1}(\,[0, \infty[\,) = \{x \in Domf : f(x) \geq 0\}$.

Debemos determinar el conjunto $\{x \in Domf : f(x) \geq 0\}$, en otras palabras debemos resolver la inecuación $f(x) \geq 0$. De lo anterior tenemos dos casos por estudiar:

- Caso $x < 0$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+x} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(x^2+x) \geq 0 \quad ; \; x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2(x+1) \geq 0 \quad ; \; x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in\,]-1, +\infty[\end{aligned}$$

  Entonces

$$x \in\,]-\infty, 0[\, \cap\,]-1, +\infty[\qquad \Leftrightarrow \qquad x \in\,]-1, 0[$$

$$S_1 = \;]-1, 0[$$

- Caso $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-x} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(x^2-x) \geq 0 \quad ; \; x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2(x-1) \geq 0 \quad ; \; x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in\,]1, +\infty[\end{aligned}$$

  Entonces

$$x \in\,]0, +\infty[\, \cap\,]1, +\infty[\qquad \Leftrightarrow \qquad x \in\,]1, +\infty[$$

$$S_2 = \;]1, +\infty[$$

Finalmente la solución de la inecuación es dada por $S_F = S_1 \cup S_2$, así

$$f^{-1}(\,[0,\infty[\,) = \;]-1,0[\;\cup\;]1,+\infty[\,.$$

Problema 3. (20 pts.)

(a) La sucesión de números reales $(a_n;\, n \geq 0)$ está definida recursivamente por la relación $a_{n+1} = a_n \left(\dfrac{1+a_{n-1}^2}{2}\right)$, $n \geq 2$. Asumiendo que para todo $n \geq 0$, $a_n \in \;]0,1[$, demuestre que la sucesión $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente. Además calcule $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Probemos que la sucesión $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente. Para esto notemos que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{1+a_{n-1}^2}{2}\right)$, $n \geq 2$. y como $a_n \in \;]0,1[$ tenemos que $a_n^2 \in \;]0,1[$, en consecuencia $a_{n-1}^2 \in \;]0,1[$ entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1+a_{n-1}^2}{2}\right) < 1 \;,\; n \geq 2.$$

Que demuestra que $(a_n;\, n \geq 0)$ es decreciente.

Cálculo del límite: Supongamos que el límite de la sucesión es L, entonces tenemos

$$L = L\left(\frac{1+L^2}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2L = L + L^3 \quad \Leftrightarrow \quad L(L^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \in \{-1,0,1\}$$

Como $a_n \in \;]0,1[$ y además es decreciente el limite es $L = 0$.

(b) Si $a > b > 0$, ambos no nulos, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a\cdot a^n + b\cdot b^n}{a^n+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n\left(a + b\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a + b\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = a$$