Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

CONTROL III (versión A)

Problema 1. (24 pts.) ¿Alguna recta tangente a la curva $y = \sqrt[3]{x}$ cruza el eje y en $y = \frac{2}{3}$? Si es así, determine una ecuación para la recta y el punto de tangencia. Si no, ¿por qué no existe tal recta tangente?

Problema 2. (24 pts.) Determine los valores de a y b que hacen que la siguiente función sea derivable en todos los reales.

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)+b & \text{si } x > 0 \\ b(x-1)^2 - 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

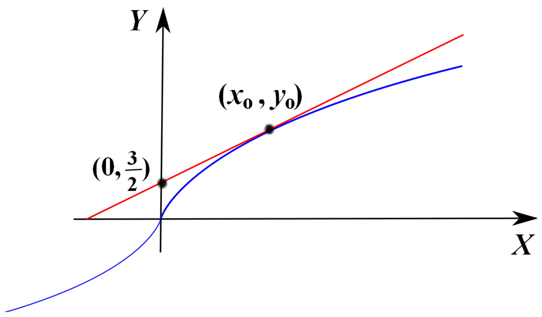
Problema 3. (12 pts.) Estudie (en función del valor de $p \in \mathbb{R} - \{-1\}$) la existencia de

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{p+1} \right)$$

PAUTA CONTROL III (versión A)

Problema 1. (24 pts.) ¿Alguna recta tangente a la curva $y = \sqrt[3]{x}$ cruza el eje y en $y = \frac{2}{3}$? Si es así, determine una ecuación para la recta y el punto de tangencia. Si no, ¿por qué no existe tal recta tangente?

Consideremos la siguiente figura



Buscamos la recta tangente, L, que pasa por los puntos del plano $Q(0, \frac{3}{2})$ y $P(x_0, y_0)$. La recta (de existir) tendrá pendiente

$$m = \frac{y_0 - \frac{2}{3}}{x_0}$$

donde $y_0 = \sqrt[3]{x_0}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente en un punto x_0 se puede obtener de la derivada de la función evaluada en dicho punto, es decir

$$m = f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$$

Igualando pendientes se tiene

$$\frac{y_0 - \frac{2}{3}}{x_0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \iff y_0 - \frac{2}{3} = \frac{x_0}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \iff y_0 - \frac{2}{3} = \frac{y_0}{3} \iff y_0 = 1$$

Así, el punto de tangencia queda determinado por $P(x_0, y_0) = P(1, 1)$ y la ecuación de recta tangente, L, es

$$L: \quad y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$L: \quad y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

Problema 2. (24 pts.) Determine los valores de a y b que hacen que la siguiente función sea derivable en todos los reales.

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) + b & \text{si } x > 0 \\ b(x-1)^2 - 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

En primer lugar analicemos la diferenciabilidad de la función en los distintos tramos y luego el caso particular de $x = 0$.

- La función es derivable en todo punto $x_0 \in]0, +\infty[$, en efecto

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{(a(x-1)+b) - (a(x_0-1)+b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a\,; \quad \forall\, x_0 \in]0, +\infty[$$

- La función es derivable en todo punto $x_0 \in]-\infty, 0[$, en efecto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(b(x-1)^2 - 3) - (b(x_0-1)^2 - 3)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{b(x^2 - x_0^2) - b(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= b(2x_0 - 1)\ ; \quad \forall\, x_0 \in]-\infty, 0[\end{aligned}$$

- En virtud a los casos anteriores tenemos que

$$f'_-(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{(b(x-1)^2 - 3) - (b^2 - 3)}{x} = -2b$$

$$f'_+(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(a(x-1)+b) - (a+b)}{x} = a$$

Luego $f(x)$ será derivable en todos los reales si a y b se relacionan según la expresión $a = -2b$, y además, se verifique la continuidad de la función en el punto $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} b(x-1)^2 - 3 = b - 3 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^-} a(x-1) + b = -a + b$$

Igualando se tiene

$$b - 3 = -a + b \quad \Longleftrightarrow \quad a = 3$$

de donde se obtiene que $b = \dfrac{-3}{2}$

Problema 3. (12 pts.) Estudie (en función del valor de $p \in \mathbb{R} - \{-1\}$) la existencia de

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{p+1} \right)$$

Tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{p+1} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{p+1} - \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \lim_{x \to 0^+} x^{p+1}$$

La existencia del limite depende de la existencia del límite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{p+1}$, el cual depende de los valores de p, como sigue:

- Si $p > -1$, esto es, si $p + 1 > 0$ se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} x^{p+1} = 0$$

- Si $p < -1$, esto es, si $p + 1 < 0$ se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} x^{p+1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{-(p+1)}} = \infty$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{p+1} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > -1 \\ \dfrac{1}{p+1} & \text{si } p < -1 \end{cases}$$