Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

CONTROL III (versión B)

Problema 1. (12 pts.) Estudie (en función del valor de $p \in \mathbb{R} - \{1\}$) la existencia de

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right)$$

Problema 2. (24 pts.) ¿Alguna recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ cruza el eje x en $x = -1$? Si es así, determine una ecuación para la recta y el punto de tangencia. Si no, ¿por qué no existe tal recta tangente?

Problema 3. (24 pts.) Determine los valores de a y b que hacen que la siguiente función sea derivable en todos los reales.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x > -1 \\ bx^2 - 3 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

PAUTA CONTROL III (versión B)

Problema 1. (12 pts.) Estudie (en función del valor de $p \in \mathbb{R} - \{1\}$) la existencia de

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right)$$

Tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-p} \lim_{x \to \infty} x^{1-p}$$

La existencia del limite depende de la existencia del límite $\lim_{x \to \infty} x^{1-p}$, el cual depende de los valores de p, como sigue:

- Si $p > 1$, esto es, si $1 - p < 0$ se tiene

$$\lim_{x \to \infty} x^{1-p} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0$$

- Si $p < 1$, esto es, si $1 - p > 0$ se tiene

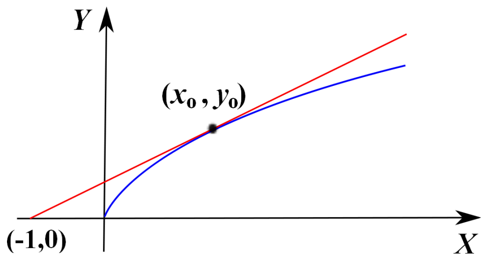
$$\lim_{x \to \infty} x^{1-p} = \infty$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

Problema 2. (24 pts.) ¿Alguna recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ cruza el eje x en $x = -1$? Si es así, determine una ecuación para la recta y el punto de tangencia. Si no, ¿por qué no existe tal recta tangente?

Consideremos la siguiente figura



Buscamos la recta tangente, L, que pasa por los puntos del plano $Q(-1, 0)$ y $P(x_0, y_0)$. La recta (de existir) tendrá pendiente $m = \dfrac{y_0}{x_0 + 1}$ donde $y_0 = \sqrt{x_0}$, esto es

$$m = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0 + 1}$$

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente en un punto x_0 se puede obtener de la derivada de la función evaluada en dicho punto, es decir

$$m = f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Igualando pendientes se tiene

$$\frac{\sqrt{x_0}}{x_0+1} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 = 1$$

Así, el punto de tangencia queda determinado por $P(x_0, \sqrt{x_0}) = P(1,1)$ y la ecuación de recta tangente, L, es

$$L: \quad y - 0 = \frac{1}{2}\big(x - (-1)\big)$$

$$L: \quad y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Problema 3. (24 pts.) Determine los valores de a y b que hacen que la siguiente función sea derivable en todos los reales.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x > -1 \\ bx^2 - 3 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

En primer lugar analicemos la diferenciabilidad de la función en los distintos tramos y luego el caso particular de $x = -1$.

- La función es derivable en todo punto $x_0 \in\,]-1, \infty[$, en efecto

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax+b) - (ax_0+b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a \ ; \quad \forall\, x_0 \in\,]-1, \infty[$$

- La función es derivable en todo punto $x_0 \in\,]-\infty, -1[$, en efecto

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{(bx^2-3) - (bx_0^2-3)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{b(x^2-x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} b(x+x_0) = 2bx_0 \ ; \quad \forall\, x_0 \in\,]-1, +\infty[$$

- Finalmente, en virtud a los casos anteriores tenemos que

$$f'_-(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{(bx^2-3) - (b-3)}{x+1} = -2b$$

$$f'_+(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{(ax+b) - (-a+b)}{x+1} = a$$

Luego $f(x)$ será derivable en todos los reales si a y b se relacionan según la expresión $a = -2b$, y además, se verifique la continuidad de la función en el punto $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1^-} bx^2 - 3 = b - 3 \quad ; \quad \lim_{x \to -1^-} ax + b = -a + b$$

Igualando se tiene

$$b - 3 = -a + b \quad \Longleftrightarrow \quad a = 3$$

de donde se obtiene que $b = \dfrac{-3}{2}$