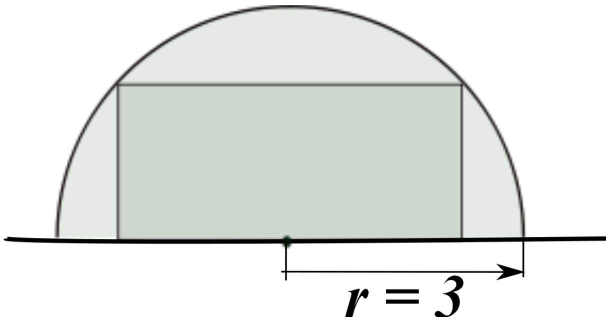
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

CONTROL IV (versión A)

Problema 1. (20 pts.) Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 3.



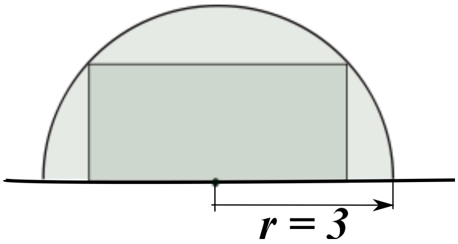
Problema 2. (20 pts.) Trace una curva suave, continua y derivable $y = f(x)$ que satisfaga las condiciones siguientes:

- $f(-2) = 8$, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$.
- $f'(2) = f'(-2) = 0$, $f'(x) > 0$, para $|x| > 2$, $f'(x) < 0$, para $|x| < 2$.
- $f''(x) < 0$, para $x < 0$, $f''(x) > 0$, para $x > 0$.

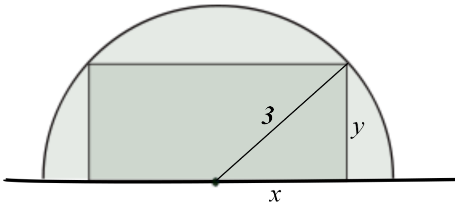
Problema 3. (20 pts.) Una partícula se desplaza a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de tal manera que su coordenada x (medida en metros) aumenta a una razón constante de $10[\frac{m}{seg}]$. ¿Qué tan rápido aumenta el ángulo de inclinación θ de la linea que une a la partícula con el origen cuando $x = 3[m]$?

PAUTA CONTROL IV (versión A)

Problema 1. (20 pts.) Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 3.



Basados en la siguiente figura, tenemos que las variables x e y se relacionan mediante la expresión $x^2 + y^2 = 3^2$, de donde, $y = \sqrt{9 - x^2}$.



El área a optimizar es $A(x, y) = 2x \cdot y$, usando la relación obtenida anteriormente, tenemos

$$A(x) = 2x \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener valores críticos.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\sqrt{9-x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{9-x^2}} \\ &= 2\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \frac{18-4x^2}{\sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Por otro lado, la segunda derivada es $A''(x) = \frac{-6x}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{2x^3}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, evaluando en $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ obtenemos $A''\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -8 < 0$, por el criterio de la segunda derivada tenemos que, el valor obtenido maximiza el área del problema.

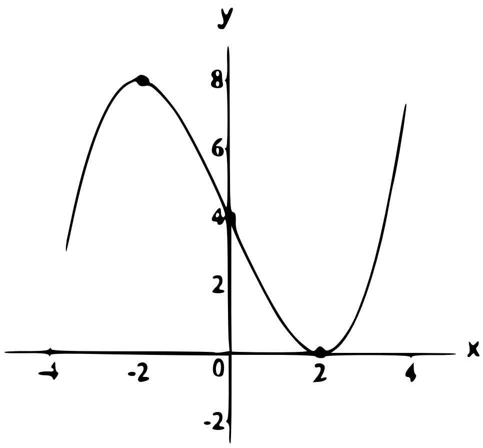
Finalmente, las dimensiones son:

$$2x = \frac{6}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Problema 2. (20 pts.) Trace una curva suave, continua y derivable $y = f(x)$ que satisfaga las condiciones siguientes:

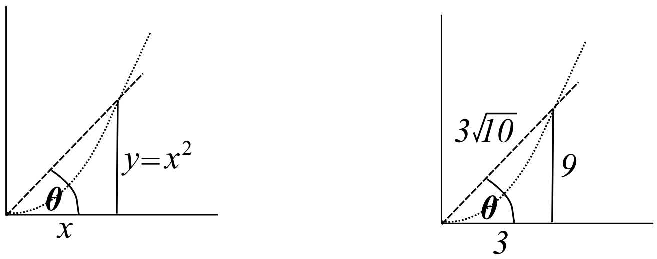
- $f(-2) = 8$, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$.
- $f'(2) = f'(-2) = 0$, $f'(x) > 0$, para $|x| > 2$, $f'(x) < 0$, para $|x| < 2$.
- $f''(x) < 0$, para $x < 0$, $f''(x) > 0$, para $x > 0$.

Con las respectivas justificaciones, el gráfico es



Problema 3. (20 pts.) Una partícula se desplaza a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de tal manera que su coordenada x (medida en metros) aumenta a una razón constante de $10[\frac{m}{seg}]$. ¿Qué tan rápido aumenta el ángulo de inclinación θ de la linea que une a la partícula con el origen cuando $x = 3[m]$?

La figura (a) muestra la situación descrita y la figura (b) la geometría en el instante en que $x = 3[m]$.



(a) (b)

La relación fundamental, es la que involucra el ángulo, θ, y la variable x. Entonces tenemos

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} = x$$

Derivando respecto al tiempo

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta \cdot \frac{dx}{dt}$$

De la figura (b) tenemos, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Por lo tanto

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \cdot 10 = 1\left[\frac{rad}{seg}\right]$$