Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

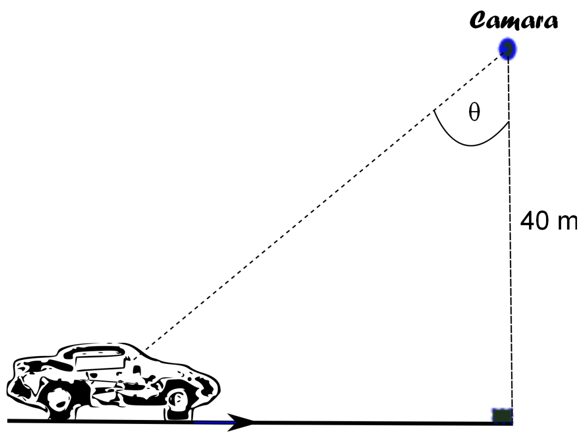
CONTROL IV (versión B)

Problema 1. (20 pts.) Un alambre de b $[m]$ de largo se corta en dos partes. Una pieza se dobla para formar un triángulo equilátero y la otra se dobla para formar un circulo. Si la suma de las areas encerradas por cada parte es mínima, ¿Cuales son las dimensiones de cada parte?

Problema 2. (20 pts.) Grafique una función dos veces derivable $y = f(x)$ con las siguientes propiedades.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0\ ,\ y'' > 0$
2	1	$y' = 0\ ,\ y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0\ ,\ y'' > 0$
4	4	$y' > 0\ ,\ y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0\ ,\ y'' < 0$
6	7	$y' = 0\ ,\ y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0\ ,\ y'' < 0$

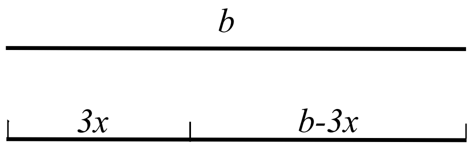
Problema 3. (20 pts.) Usted hace una video grabación de una carrera de automóviles desde una tribuna ubicada a 40 $[m]$ de la pista; sigue un automóvil que se desplaza a 80 $[\frac{m}{seg}]$, como se ilustra en la figura ¿Qué tan rápido cambiará el ángulo θ de su cámara cuando el automóvil esté justo enfrente de usted? ¿Qué tan rápido cambiará medio segundo después?



PAUTA CONTROL IV (versión B)

Problema 1. (20 pts.) Un alambre de b $[m]$ de largo se corta en dos partes. Una pieza se dobla para formar un triángulo equilátero y la otra se dobla para formar un circulo. Si la suma de las areas encerradas por cada parte es mínima, ¿Cuales son las dimensiones de cada parte?

Consideramos los cortes del alambre con longitudes de $3x$ (para el triángulo equilátero) y $b-3x$ (para el circulo), como se muestra en la figura.



Con esto obtenemos un triángulo equilátero de lados igual a x, y una circunferencia de perímetro $p = 2\pi r = (b-3x) \;\Rightarrow\; r = \frac{b-3x}{2\pi}$.

El area que se desea minimizar esta dada por

$$A(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}_{\text{Area triangulo}} + \underbrace{\pi\left(\frac{b-3x}{2\pi}\right)^2}_{\text{Area circulo}}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \pi\left(\frac{b-3x}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{b^2-6bx+9x^2}{4\pi} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi x^2 + b^2 - 6bx + 9x^2}{4\pi} \\ &= \frac{b^2-6bx+(9+\sqrt{3}\pi)x^2}{4\pi} \end{aligned}$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener valores críticos.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{-6b+2(9+\sqrt{3}\pi)x}{4\pi} \\ &= \frac{-3b+(9+\sqrt{3}\pi)x}{2\pi} \end{aligned}$$

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3b}{9+\sqrt{3}\pi}$$

Por otro lado, la segunda derivada es $A''(x) = \frac{9+\sqrt{3}\pi}{2\pi} > 0$, por el criterio de la segunda derivada tenemos que, el valor obtenido minimiza el área del problema.

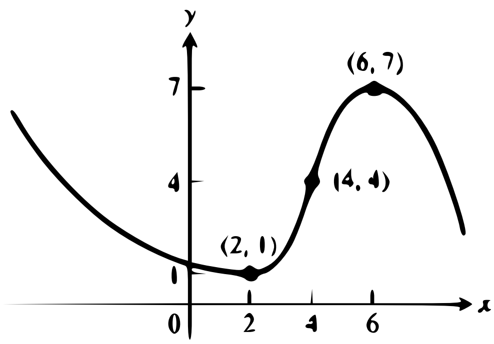
Finalmente, las dimensiones son:

$$3x = \frac{9b}{9+\sqrt{3}\pi} \quad ; \quad b-3x = \frac{\sqrt{3}\pi b}{9+\sqrt{3}\pi}$$

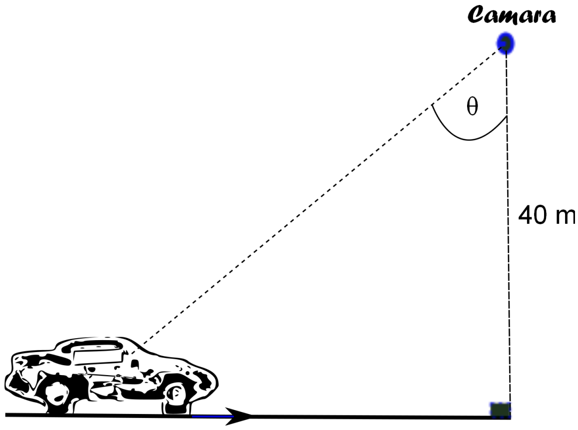
Problema 2. (20 pts.) Grafique una función dos veces derivable $y = f(x)$ con las siguientes propiedades.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0\ ,\ y'' > 0$
2	1	$y' = 0\ ,\ y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0\ ,\ y'' > 0$
4	4	$y' > 0\ ,\ y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0\ ,\ y'' < 0$
6	7	$y' = 0\ ,\ y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0\ ,\ y'' < 0$

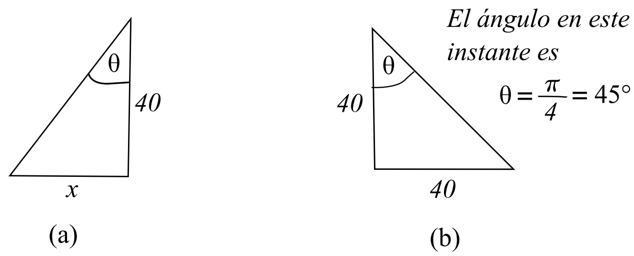
Con las respectivas justificaciones, el gráfico es



Problema 3. (20 pts.) Usted hace una video grabación de una carrera de automóviles desde una tribuna ubicada a 40 $[m]$ de la pista; sigue un automóvil que se desplaza a 80 $[\frac{m}{seg}]$, como se ilustra en la figura ¿Qué tan rápido cambiará el ángulo θ de su cámara cuando el automóvil esté justo enfrente de usted? ¿Qué tan rápido cambiará medio segundo después?



Consideremos la figura (a).



La relación entre el ángulo, θ, y la variable x es: $\tan\theta = \frac{x}{40}$. Derivando con respecto al tiempo se obtiene:

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{40}\frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{40}\frac{dx}{dt}$$

Donde $\frac{dx}{dt} = 80\ [\frac{m}{seg}]$.

Cuando el automóvil esté justo enfrente, se tendrá $\theta = 0$, entonces

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0} = \frac{\cos^2 0}{40} \cdot 80 = 2\left[\frac{rad}{seg}\right]$$

Medio segundo después, el automóvil habrá avanzado una distancia $x = 80\ [\frac{m}{seg}] \cdot \frac{1}{2}[seg] = 40[m]$. Entonces tendremos la geometría descrita en la figura (b). Por lo tanto

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{40} \cdot 80 = \frac{\frac{1}{2}}{40} \cdot 80 = 1\left[\frac{rad}{seg}\right]$$