Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencia, Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura Cálculo I, Módulo Básico Ingeniería, Primer Semestre 2012

PEP Acumulativa

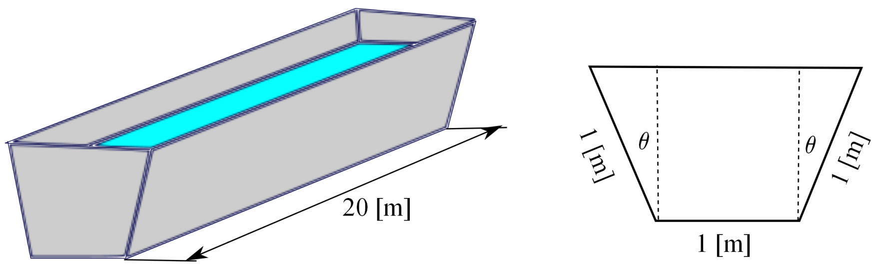
Problema 1. (20 pts.)

(1.1) ¿Para qué valores de a y b la función $g(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3+x+2b & \text{si } x > -1 \end{cases}$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$?

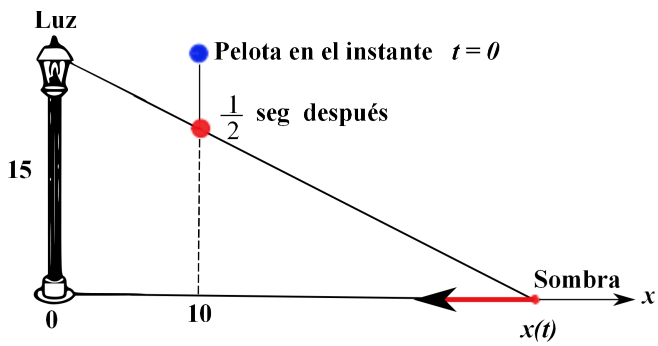
(1.2) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $x^3y^3 + y^2 = x + y$, en el punto $(1, -1)$.

Problema 2. (20 pts.)

(2.1) El abrevadero de la figura se debe construir con las dimensiones que se indican en la figura. Sólo se puede variar el ángulo θ. ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del abrevadero?



(2.2) Una luz brilla desde el extremo superior de un poste de $15\,[m]$ de altura. Se lanza una pelota a la misma altura desde un punto ubicado a $10\,[m]$ de distancia de la luz (véase la figura). ¿Qué tan rápido se mueve la sombra de la pelota a lo largo del suelo $\frac{1}{2}$ segundo después? (Suponga que la pelota cae una distancia $s = 16t^2\,[m]$ en t segundos).



Problema 3. (20 pts.)

(3.1) Una partícula se desplaza sobre una recta coordenada con aceleración $a(t) = \dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = 15\sqrt{t} - \dfrac{3}{\sqrt{t}}$, sujeta a las condiciones $s'(1) = 4$ y $s(1) = 0$. Determine la posición $s(t)$ en términos de t.

(3.2) Sea $f(x)$ la función que satisface la relación $\dfrac{df(x)}{dx} = \operatorname{sen}(\ln x)$, con $f(e^\pi) = e^\pi$. Calcule $f(e^{2\pi})$.

PAUTA PRUEBA ACUMULATIVA

Problema 1. (20 pts.)

(1.1) ¿Para qué valores de a y b la función $g(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3+x+2b & \text{si } x > -1 \end{cases}$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$?

En primer lugar analicemos la diferenciabilidad de la función en los distintos tramos y luego el caso particular de $x = -1$.

- La función es derivable en todo punto $x_0 \in]-\infty, -1[$. En efecto,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a, \quad \forall\, x_0 \in]-\infty, -1[.$$

- La función es derivable en todo punto $x_0 \in]-1, +\infty[$. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(ax^3+x+2b)-(ax_0^3+x_0+2b)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x^3-x_0^3)+(x-x_0)}{x-x_0} \\ &= 3ax_0^2+1, \quad \forall\, x_0 \in]-1, +\infty[. \end{aligned}$$

- En virtud de los casos anteriores, tenemos que:

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{(ax+b)-(-a+b)}{x-(-1)} = a$$

$$f'_{+}(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{(ax^3+x+2b)-(-a-1+2b)}{x-(-1)} = 3a+1$$

Luego f será derivable en todos los reales si se verifica que $a = 3a+1$, es decir, si $a = 0,5$. Además, para que f sea derivable, f debe ser continua.

La continuidad de f en $x = -1$ se verifica si $\lim_{x \to -1^+} ax^3+x+2b = f(-1)$. Así, $-a-1+2b = -a+b$, de donde $b = 1$.

(1.2) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $x^3y^3+y^2 = x+y$ en el punto $(1, -1)$.

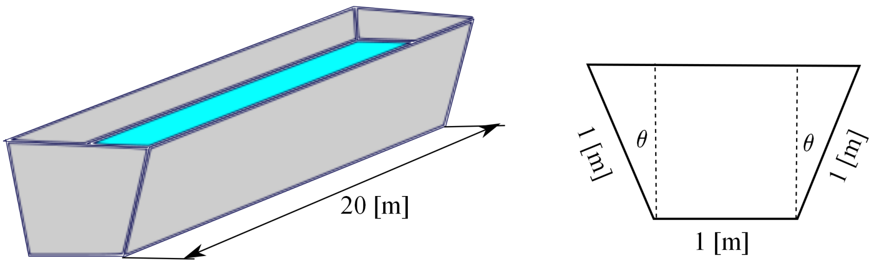
La función implícita escrita en la forma $F(x, y, c) = 0$ es $x^3y^3+y^2-x-y = 0$. Derivando implícitamente la función respecto de x tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3y^3+y^2-x-y) = 0 &\iff 3x^2y^3+x^3 \cdot 3y^2y'+2yy'-1-y' = 0 \\ &\iff 3x^2y^3-1+y'(3x^3y^2+2y-1) = 0 \\ &\iff y' = \frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2+2y-1} \end{aligned}$$

Así, en $(1, -1)$ la pendiente de la recta tangente es indeterminada, por lo cuál la curva no tiene recta normal en el punto $(1-1)$.

Problema 2. (20 pts.)

(2.1) El abrevadero de la figura se debe construir con las dimensiones que se indican en la figura. Sólo se puede variar el ángulo θ. ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del abrevadero?



Para maximizar el volumen, basta con optimizar el área de la sección transversal, área que corresponde a la de un trapecio de bases $a = 1$, $b = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ y altura $h = \cos\theta$, dicha área se obtiene con la formula $A = \dfrac{1}{2}(a+b)h$. Luego la función a optimizar es $A(\theta) = \dfrac{1}{2}(2+2\operatorname{sen}\theta)\cos\theta$, o equivalentemente

$$A(\theta) = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta.$$

$A'(\theta) = \cos^2\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = 1-\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1-\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta = (1+\operatorname{sen}\theta)(1-2\operatorname{sen}\theta)$

Igualando a cero la primera derivada se obtiene

$$\begin{aligned} A'(\theta) = 0 &\iff (1+\operatorname{sen}\theta)(1-2\operatorname{sen}\theta) = 0 \\ &\iff 1 + \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \vee \quad 1 - 2\operatorname{sen}\theta = 0 \\ &\iff \operatorname{sen}\theta = -1 \quad \vee \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \\ &\iff \theta = \frac{3\pi}{2} \quad \vee \quad \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Como se deduce de la aplicación, el ángulo θ debe estar en un rango de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo tanto el ángulo buscado es $\theta = \frac{\pi}{6}$ (posible valor que maximiza el área).

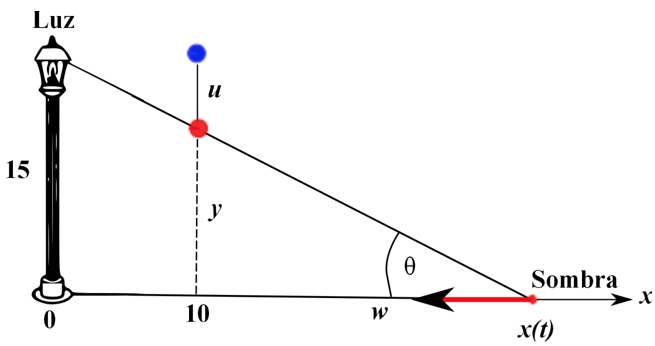
Por otro lado el calculo de la segunda derivada da como resultado $A''(\theta) = -\cos\theta(1 + 2\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow A''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$. Entonces en $\theta = \frac{\pi}{6}$ el volumen es máximo.

(2.2) Una luz brilla desde el extremo superior de un poste de $15\,[m]$ de altura. Se lanza una pelota a la misma altura desde un punto ubicado a $10\,[m]$ de distancia de la luz (véase la figura). ¿Qué tan rápido se mueve la sombra de la pelota a lo largo del suelo $\frac{1}{2}$ segundo después? (Suponga que la pelota cae una distancia $s = 16t^2\,[m]$ en t segundos).

En la figura, se denotan las distancias de interés, a saber, y, u, w. Usando la razón trigonométrica tangente se tiene la siguiente relación:

$$\tan\theta = \frac{15}{10+w} = \frac{y}{w} \quad\Longrightarrow\quad w = \frac{10y}{15-y}$$

Observación: La relación anterior también se puede obtener usando semejanza de triángulos.



Por otro lado, podemos definir la distancia y como sigue: $y = 15 - 16t^2$.

Luego se tiene

$$w = \frac{10(15-16t^2)}{15-(15-16t^2)} = \frac{150-160t^2}{16t^2}$$

Derivando respecto de t.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{150-160t^2}{16t^2}\right) = \frac{-75}{4t^3}$$

Finalmente, evaluamos en el tiempo $t = \frac{1}{2}$ $[seg]$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{-75}{4(\frac{1}{2})^3} = -150\ \left[\frac{m}{seg}\right]$$

El signo negativo tiene sentido, ya que, la sombra se mueve en dirección contraria al eje positivo x.

Problema 3. (20 pts.)

(3.1) Una partícula se desplaza sobre una recta coordenada con aceleración $a(t) = \dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = 15\sqrt{t} - \dfrac{3}{\sqrt{t}}$, sujeta a las condiciones $s'(1) = 4$ y $s(1) = 0$. Determine la posición $s(t)$ en términos de t.

Para obtener $s(t)$, integramos dos veces.

- $s'(t) = \displaystyle\int s''(t)\,dt = \int\left(15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}\right)dt = 10t^{\frac{3}{2}} - 6\sqrt{t} + C_1$

  Con la condición, $s'(1) = 4$ tenemos: $10\cdot 1^{\frac{3}{2}} - 6\cdot\sqrt{1} + C_1 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad C_1 = 0$
- $s(t) = \displaystyle\int s'(t)\,dt = \int\left(10t^{\frac{3}{2}} - 6\sqrt{t}\right)dt = 4t^{\frac{5}{2}} - 4t^{\frac{3}{2}} + C_2$

  Con la condición, $s(1) = 0$ tenemos: $4\cdot 1^{\frac{5}{2}} - 4\cdot 1^{\frac{3}{2}} + C_2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad C_2 = 0$

Así, la posición esta dada por la función

$$s(t) = 4t^{\frac{5}{2}} - 4t^{\frac{3}{2}}$$

(3.2) Sea $f(x)$ la función que satisface la relación $\dfrac{df(x)}{dx} = \operatorname{sen}(\ln x)$, con $f(e^{\pi}) = e^{\pi}$. Calcule $f(e^{2\pi})$.

La función es $f(x) = \displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx$, para obtenerla integramos por partes,

$u = \operatorname{sen}(\ln x) \ \Rightarrow \ du = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}\ dx$

$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ dx$$

Integramos nuevamente por partes

$u = \cos(\ln x) \ \Rightarrow \ du = \dfrac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\ dx$

$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \left(x \cdot \cos(\ln x) - \int -\operatorname{sen}(\ln x)\ dx \right) \\ &= x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \left(x \cdot \cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx \right) \\ &= x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - (x \cdot \cos(\ln x) + f(x)) \\ &= x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) - f(x) \end{aligned}$$

De esto último se tiene

$$2f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x)}{2} + C$$

La condición, $f(e^{\pi}) = e^{\pi}$, nos permite obtener el valor de la constante de integración, C.

$$f(e^{\pi}) = \frac{e^{\pi} \cdot \operatorname{sen}(\ln e^{\pi}) - e^{\pi} \cdot \cos(\ln e^{\pi})}{2} + C = \frac{e^{\pi} \cdot \operatorname{sen}(\pi) - e^{\pi} \cdot \cos(\pi)}{2} + C = \frac{e^{\pi}}{2} + C$$

Luego

$$\frac{e^{\pi}}{2} + C = e^{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{e^{\pi}}{2}$$

Así, la función es

$$f(x) = \frac{x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) + e^{\pi}}{2}$$

Finalmente, evaluando en $x = e^{2\pi}$.

$$\begin{aligned} f(e^{2\pi}) &= \frac{e^{2\pi} \cdot \operatorname{sen}(\ln e^{2\pi}) - e^{2\pi} \cdot \cos(\ln e^{2\pi}) + e^{\pi}}{2} \\ &= \frac{e^{\pi}}{2}(e^{\pi} \cdot \operatorname{sen}(2\pi) - e^{\pi} \cdot \cos(2\pi) + 1) \\ &= \frac{e^{\pi}}{2}(-e^{\pi} + 1) \\ &= \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{2\pi}}{2} \end{aligned}$$