Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencia, Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura Cálculo I, Módulo Básico Ingeniería, Primer Semestre 2012

PEP II

Problema 1. (20 pts.)

(1.1) Determine un valor de c, tal que, la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x - 3\,\mathrm{sen}\,3x}{5x^3} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

(1.2) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$.

Problema 2. (20 pts.)

(2.1) La gráfica de la figura 1 indica la posición $s = f(t)$ de un cuerpo que se desplaza hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una recta coordenada. Se pide responder:

(2.1.1) ¿Aproximadamente en qué momento la velocidad es igual a cero? ¿Aproximadamente en qué momento la aceleración es igual a cero?

(2.1.4) ¿En qué momentos la aceleración es negativa?

(2.2) Considere la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$ (serpentina de Newton).

(2.2.1) Verifique que $f'(x) = \dfrac{-4(x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^2}$ y $f''(x) = \dfrac{8x(x^2 - 12)}{(x^2 + 4)^3}$.

(2.2.2) Encuentre máximos y/o mínimos (locales y globales) y puntos de inflexión.

(2.2.3) Determine intervalos de crecimiento y concavidad.

(2.2.4) Bosqueje el gráfico de $f(x)$.

Problema 3. (20 pts.)

(3.1) Un triángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{3}[m]$ de largo se hace girar alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Determine el radio, la altura y el volumen del cono de mayor volumen que se pueda hacer de esta manera. Ver figura 2

(3.2) El voltaje V (en volts), la corriente I (en amperes) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico, como el que se ilustra en la figura 3, se relacionan mediante la ecuación $V = IR$. Suponga que V aumenta a razón de $1[\frac{volt}{seg}]$, mientras que I disminuye a razón de $\frac{1}{3}[\frac{amp}{seg}]$. Donde t es el tiempo medido en segundos. Determine la razón a la que cambia R cuando $V = 12[volts]$ e $I = 2[amp]$. ¿R aumenta o disminuye?

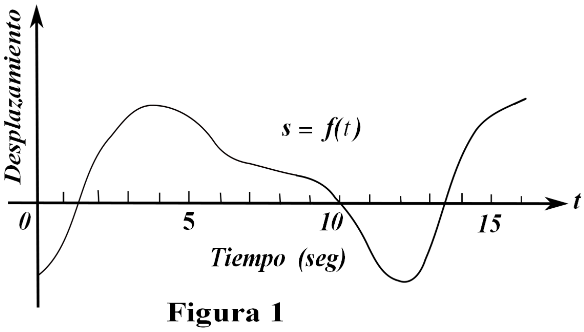


Figura 1

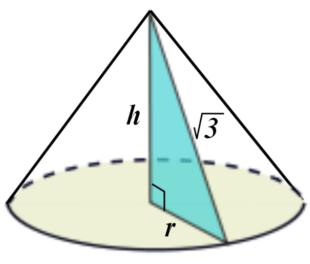


Figura 2

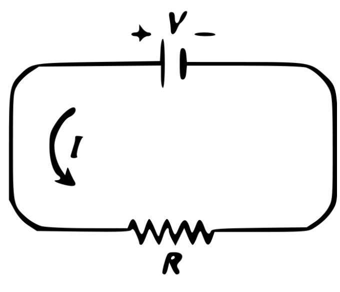


Figura 3

PAUTA PEP II

Problema 1. (20 pts.)

(1.1) Determine un valor de c, tal que, la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x - 3\operatorname{sen} 3x}{5x^3} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

Debemos realizar el cálculo del límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x - 3\operatorname{sen} 3x}{5x^3}$, que tiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$. Entonces, usando la Regla de L'Höpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{9x - 3\operatorname{sen} 3x}{5x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{9 - 9\cos 3x}{15x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{27\operatorname{sen} 3x}{30x} \\
&= \frac{27}{10} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \\
&= \frac{27}{10} \cdot 1 = \frac{27}{10}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para que la función f sea continua, se requiere $c = \dfrac{27}{10}$.

(1.2) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}
\end{aligned}$$

Calculemos el límite usando la Regla de L'Höpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{-2}{x^3}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \mathrm{e}^0 = 1$$

Problema 2. (20 pts.)

(2.1) La gráfica de la figura 1 indica la posición $s = f(t)$ de un cuerpo que se desplaza hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una recta coordenada. Se pide responder:

(2.1.1) ¿Aproximadamente en qué momento la velocidad es igual a cero?

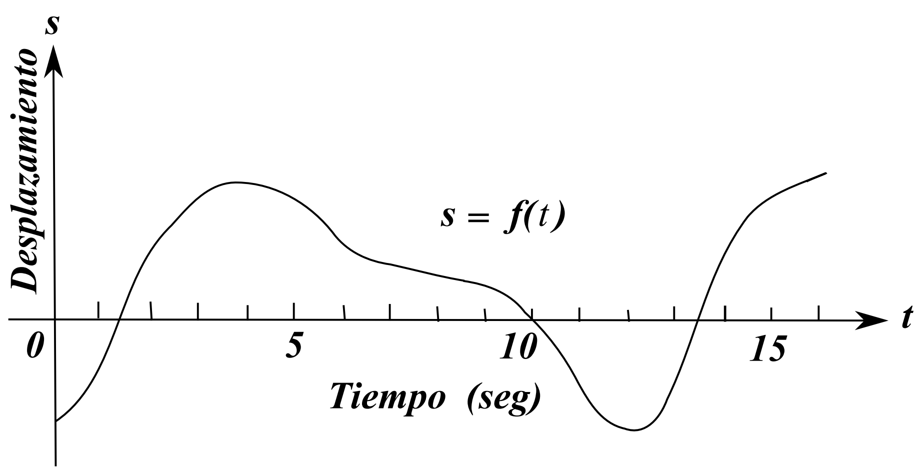
En los instante donde $t = 4$ ó $t = 12$

¿Aproximadamente en qué momento la aceleración es igual a cero?

Cuando $t \in \{\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, 8, 11, \frac{27}{2}\}$

(2.1.2) ¿En qué momentos la aceleración es negativa?

La aceleración es negativa cuando $t \in \left]\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right[\cup]8, 11[\cup \left]\frac{27}{2}, 16\right[$.



(2.2) Considere la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ (serpentina de Newton).

(2.2.1) Verifique que $f'(x) = \dfrac{-4(x^2-4)}{(x+4)^2}$ y $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$.

Cálculo de la primera derivada.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4(x^2+4) - 4x(2x)}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2}
\end{aligned}
$$

Cálculo de la segunda derivada.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-8x(x^2+4)^2+4(x^2-4)2(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4} \\
&= \frac{(x^2+4)\left[-8x(x^2+4)+16x(x^2-4)\right]}{(x^2+4)^4} \\
&= \frac{-8x(x^2+4-2x^2+8)}{(x^2+4)^3} \\
&= \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}
\end{aligned}$$

(2.2.2) Encuentre máximos y/o mínimos (locales y globales) y puntos de inflexión.

Los posibles máximos y/o mínimos los obtenemos calculando los valores de x tales que $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -4(x^2-4) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -2 \ \vee \ x = 2
\end{aligned}$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada tenemos:

$$f''(-2) = \frac{1}{4} > 0 \qquad ; \qquad f''(2) = \frac{-1}{4} < 0$$

Luego, en $x = -2$ la función tiene un mínimo local, y en en $x = 2$ la función tiene un máximo local.

Por otro lado, notemos que el dominio de la función es $Dom\ f = \mathbb{R}$, y que además f es continua, por ser combinación de funciones continuas. En consecuencia, el gráfico no tiene asíntotas verticales, veamos si tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2+4} = 0$$

De esta forma podemos deducir que, en los puntos de máximo y mínimo señalados anteriormente $f(x)$ tiene un máximo y mínimo global.

Los candidatos a puntos de inflección son los x tales que $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe. Como $f''(x)$ existe, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces estudiamos la ecuación.

$$\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x^2-12) = 0 \\
&\Leftrightarrow \big(x-(-2\sqrt{3})\big)(x-0)(x-2\sqrt{3}) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -2\sqrt{3} \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $x = -2\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = 2\sqrt{3}$ son candidatos a punto de inflexión.

(2.2.3) Determine intervalos de crecimiento y concavidad.

Crecimiento de f. Determinemos el signo de $f'(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2} > 0 \\
&\Leftrightarrow -4(x^2-4) > 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \\
&\Leftrightarrow x \in]-2, 2[
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2} < 0 \\
&\Leftrightarrow -4(x^2-4) < 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[
\end{aligned}
$$

Por lo tanto f es estrictamente creciente en el intervalo $]-2,2[$ y estrictamente decreciente en el intervalo $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

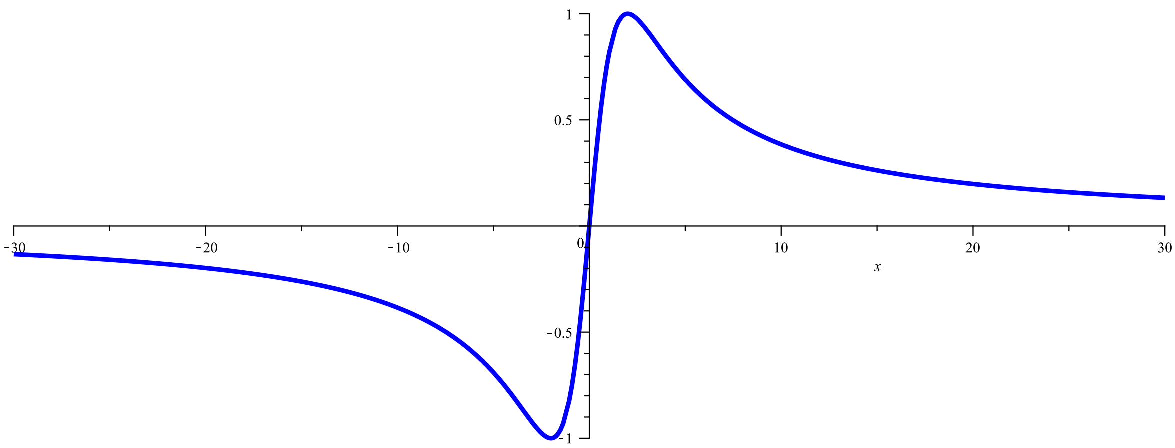
Concavidad de f. Determinemos el signo de $f''(x)$

$$
\begin{aligned}
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} > 0 \\
&\Leftrightarrow 8x(x^2-12) > 0 \\
&\Leftrightarrow \big(x-(-2\sqrt{3})\big)(x-0)(x-2\sqrt{3}) > 0 \\
&\Leftrightarrow x \in\ ]-2\sqrt{3}, 0\ [\ \cup\ ]\ 2\sqrt{3}, +\infty[
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} < 0 \\
&\Leftrightarrow 8x(x^2-12) < 0 \\
&\Leftrightarrow \big(x-(-2\sqrt{3})\big)(x-0)(x-2\sqrt{3}) < 0 \\
&\Leftrightarrow x \in\ ]-\infty, -2\sqrt{3}\ [\ \cup\ ]\ 0, 2\sqrt{3}[
\end{aligned}
$$

Por lo tanto f es cóncava hacia arriba en el intervalo $]-2\sqrt{3},0\ [\ \cup\ ]\ 2\sqrt{3},+\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]-\infty,-2\sqrt{3}\ [\ \cup\ ]\ 0,2\sqrt{3}[$. Además concluimos que $x=-2\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=2\sqrt{3}$ son puntos de inflexión

(2.2.4) Bosqueje el gráfico de $f(x)$.



Problema 3. (20 pts.)

(3.1) Un triángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{3}[m]$ de largo se hace girar alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Determine el radio, la altura y el volumen del cono de mayor volumen que se pueda hacer de esta manera. Ver figura 2

La función a optimizar es el volumen del cono formado al rotar el triángulo, es decir, $V(r,h) = \frac{\pi}{3}r^2h$. Por otro lado, las variables r y h se relacionan por $r^2 + h^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 3 - h^2$. Entonces

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(3-h^2)h = \frac{\pi}{3}(3h - h^3)\ .$$

Derivando respecto a h e igualamos a cero.

$$\begin{aligned} V'(h) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3}(3-3h^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3 - 3h^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad h^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad h = 1 \ \vee \ h = -1 \end{aligned}$$

Claramente la solución coherente a la situación física es $h = 1$, que representa la posible altura que maximiza el volumen. Para verificar esto, apliquemos el criterio de la segunda derivada.

$$V''(h) = -2\pi h \qquad \Leftrightarrow \qquad V''(1) = -2\pi < 0$$

Así, con $h = 1\ [m] \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2}\ [m]$ se obtiene el volumen máximo cuyo valor es

$$V = \frac{2\pi}{3}\ [m^3]\ .$$

(3.2) El voltaje V (en volts), la corriente I (en amperes) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico, como el que se ilustra en la figura 3, se relacionan mediante la ecuación $V = IR$. Suponga que V aumenta a razón de $1[\frac{volt}{seg}]$, mientras que I disminuye a razón de $\frac{1}{3}[\frac{amp}{seg}]$. Donde t es el tiempo medido en segundos. Determine la razón a la que cambia R cuando $V = 12[volts]$ e $I = 2[amp]$. ¿R aumenta o disminuye?

Derivando respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dI}{dt}R + I\frac{dR}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{dI}{dt}R\right)$$

Donde el valor de R en el instante requerido es $R = \frac{V}{I} = \frac{12[volts]}{2[amp]} = 6[ohms]$. Reemplazando los datos, se obtiene

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{-1}{3}\cdot 6\right) = \frac{3}{2}\ \left[\frac{ohms}{seg}\right]\ .$$

Como la razón de cambio es positiva, se concluye que R aumenta.