Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

---

# SOLUCION CONTROL I (versión A)

**Problema 1.** (20 pts.) Determine para que valores de $a$, la ecuación $x^2+1=\dfrac{|a-1|}{a}$, tiene solución en $\mathbb{R}$.

Para que la expresión dada sea valida en $\mathbb{R}$, notemos que se debe cumplir

$$x^2=\frac{|a-1|}{a}-1\geq 0$$

Y los valores de $a$, los obtenemos al resolver la inecuación

$$\frac{|a-1|}{a}-1\geq 0 \qquad a\neq 0$$

Por la definición de valor absoluto tenemos

$$|a-1|=\begin{cases} a-1 & \text{si } a\geq 1\\ 1-a & \text{si } a<1\end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos

- Caso $a\geq 1$

$$\frac{a-1}{a}-1=\frac{-1}{a}\geq 0 \quad ; \; a\neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a<0$$

  Lo que claramente es una contradicción, luego

$$S_1=\emptyset$$

- Caso $a<1$

$$\begin{aligned}\frac{1-a}{a}-1=\frac{1-2a}{a}\geq 0 \quad ; \; a\neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a(1-2a)\geq 0 \quad ; \; a\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad 2a\left(a-\frac{1}{2}\right)\leq 0 \quad ; \; a\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad a\in \left]0,\frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

Entonces

$$a \in \,]-\infty, 1[\, \cap \left]0, \frac{1}{2}\right] \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

$$S_2 = \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

Finalmente la solución global es dada por

$$S_F = S_1 \cup S_2 = \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

**Problema 2.** (20 pts.) Resuelva $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+1}$.

Las cantidades subradicales deben satisfacer (simultáneamente) las siguientes condiciones

- $x-1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$
- $x+2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2$
- $x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$

Así, la condición general de la inecuación es la intersección de estas, a saber, $x \geq 1$

Por otro lado, notemos que bajo la condición general la cantidad definida por $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}>0$. Multiplicando la inecuación por esta cantidad resulta

$$x-1-(x+2) \leq \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right).$$

$$-3 \leq \underbrace{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)}_{\text{esto es } >0}.$$

Finalmente concluimos que la solución es

$$x \in [1,+\infty[$$

**Problema 3.** (20 pts.) Resuelva la inecuación $\dfrac{-|5x-6|+x^2}{5x-6} > 0$.

Por la definición de valor absoluto tenemos

$$|5x-6| = \begin{cases} 5x-6 & \text{si } x \geq \frac{6}{5} \\ 6-5x & \text{si } a < \frac{6}{5} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos

- Caso en que $x \geq \frac{6}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{-(5x-6)+x^2}{5x-6} > 0;\ x \neq \frac{6}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)(x-3)}{5\left(x-\frac{6}{5}\right)} > 0;\ x \neq \frac{6}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{6}{5}\right)(x-2)(x-3) > 0 \quad ;\ x \neq \frac{6}{5} \end{aligned}$$

En virtud al método reducido, los valores de $x$ que satisfacen la inecuación son

$$x \in \left]\frac{6}{5},2\right[ \cup \, ]3,+\infty[$$

Intersectando con la condición $x \geq \frac{6}{5}$, se tiene

$$S_I \equiv \left]\frac{6}{5},2\right[ \cup \, ]3,+\infty[$$

- Caso en que $x < \frac{6}{5}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{(5x-6)+x^2}{5x-6} > 0;\ x \neq \frac{6}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+6)(x-1)}{5\left(x-\frac{6}{5}\right)} > 0;\ x \neq \frac{6}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad (x-(-6))\,(x-1)\left(x-\frac{6}{5}\right) > 0 \quad ;\ x \neq \frac{6}{5}
\end{aligned}
$$

En virtud al método reducido, los valores de $x$ que satisfacen la inecuación son

$$x \in \left]-6, 1\right[ \ \cup \ \left]\frac{6}{5}, +\infty\right[$$

Intersectando con la condición $x < \frac{6}{5}$, se tiene

$$S_{II} \equiv \ \left]-6, 1\right[$$

Finalmente la unión de $S_I$ y $S_{II}$ es la solución de la inecuación

$$S_F = S_I \cup S_{II} = \left]-6, 1\right[ \ \cup \ \left]\frac{6}{5}, 2\right[ \ \cup \left]3, +\infty\right[$$