Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2012

CONTROL I (versión B)

Problema 1. (20 pts.) Resuelva $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} > x$. Las cantidades subradicales deben satisfacer (simultáneamente) las siguientes condiciones

- $x \geq 0$
- $x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 4$

Así, la condición general de la inecuación es la intersección de estas, a saber, $x > 4$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} > x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \ > \ x\sqrt{x-4} \quad /()^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x > x^2(x-4) \\
&\Leftrightarrow \quad x(x^2 - 4x - 1) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x - (2-\sqrt{5})\right)(x-0)\left(x - (\sqrt{5}-2)\right) < 0
\end{aligned}$$

En virtud al método reducido, la solución es

$$x \ \in \ \left]-\infty, 2-\sqrt{5}\right[\ \cup \ \left]0, \sqrt{5}+2\right[$$

Intersectando con la condición general se obtiene la solución final, que es

$$S_F = \ \left]4, \sqrt{5}+2\right[$$

Problema 2. (20 pts.) Determine para que valores de a, la ecuación $(x-1)^2 + 1 = \dfrac{|a-2|}{a-1}$, tiene solución en $\mathbb{R}$.

Para que la expresión dada sea valida en $\mathbb{R}$, notemos que se debe cumplir

$$(x-1)^2 = \frac{|a-2|}{a-1} - 1 \geq 0$$

Y los valores de a, los obtenemos al resolver la inecuación

$$\frac{|a-2|}{a-1}-1 \geq 0 \qquad a \neq 1$$

Por la definición de valor absoluto tenemos

$$|a-2| = \begin{cases} a-2 & \text{si } a \geq 2 \\ 2-a & \text{si } a < 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos

- Caso $a \geq 2$

$$\frac{a-2}{a-1}-1 = \frac{-1}{a-1} \geq 0 \quad ; \; a \neq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a < 1$$

  Lo que claramente es una contradicción, luego

$$S_1 = \emptyset$$

- Caso $a < 2$

$$\begin{aligned} \frac{2-a}{a-1}-1 = \frac{3-2a}{a-1} \geq 0 \quad ; \; a \neq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (a-1)(3-2a) \geq 0 \quad ; \; a \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(a-1)\left(a-\frac{3}{2}\right) \leq 0 \quad ; \; a \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a \in \left]1, \frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

  Entonces

$$a \in \,]-\infty, 2[\, \cap \left]1, \frac{3}{2}\right] \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

$$S_2 = \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

Finalmente la solución global es dada por

$$S_F = S_1 \cup S_2 = \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

Problema 3. (20 pts.) Resuelva la inecuación $\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{|1-x|-x^2}{-x^2+2x+5}$.

Por la definición de valor absoluto tenemos

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos

- Caso en que $x \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} \leq \frac{x-1-x^2}{-x^2+2x+5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x-1-x^2}{-x^2+2x+5} - \frac{1}{5} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-10+3x-4x^2}{-5(x^2-2x-5)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4x^2-3x+10}{5(x^2-2x-5)} \geq 0 \quad ; x \neq 1-\sqrt{6} \ \wedge \ x \neq 1+\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Note que $4x^2 - 3x + 10 > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, luego la solοción de la inecuación depende solo del término: $x^2 - 2x - 5 = \left(x - (1-\sqrt{6})\right)\left(x - (1+\sqrt{6})\right)$

En virtud al método reducido, los valores de x que satisfacen la inecuación son

$$x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{6}\right[\ \cup \ \left]1+\sqrt{6}, +\infty\right[$$

Intersectando con la condición $x \geq 1$, se tiene

$$S_I \equiv \ \left]1+\sqrt{6}, +\infty\right[$$

- Caso en que $x < 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} \leq \frac{1-x-x^2}{-x^2+2x+5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-x-x^2}{-x^2+2x+5} - \frac{1}{5} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-7x-4x^2}{-5(x^2-2x-5)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4x\left(x+\frac{7}{4}\right)}{5\left(x-(1-\sqrt{6})\right)\left(x-(1+\sqrt{6})\right)} \geq 0 \quad ; x \neq 1-\sqrt{6} \ \wedge \ x \neq 1+\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Esta última inecuación es equivalente a la inecuación dada por

$$\left(x - \frac{-7}{4}\right)\left(x-(1-\sqrt{6})\right)(x-0)\left(x-(1+\sqrt{6})\right) \geq 0 \quad ; x \neq 1-\sqrt{6} \ \wedge \ x \neq 1+\sqrt{6}$$

En virtud al método reducido, los valores de x que satisfacen la inecuación son

$$x \in \left]-\infty, \frac{-7}{4}\right] \ \cup \ \left]1-\sqrt{6}, 0\right] \ \cup \ \left]1+\sqrt{6}, +\infty\right[$$

Intersectando con la condición $x < 1$, se tiene

$$S_{II} \equiv \ \left]-\infty, \frac{-7}{4}\right] \ \cup \ \left]1-\sqrt{6}, 0\right]$$

Finalmente la unión de S_I y S_{II} es la solución de la inecuación

$$S_F = S_I \cup S_{II} = \ \left]-\infty, \frac{-7}{4}\right] \ \cup \ \left]1-\sqrt{6}, 0\right] \ \cup \ \left]1+\sqrt{6}, +\infty\right[$$