PEP I

Problema 1.

(1.1) Si $a < 0$ fijo, resuelva la ecuación $-a\,|x+a| = |x+a|(8a + |x - \sqrt{-a}\,|^2\,)$ (8 pts.)

(1.2) Resuelva la inecuación $\dfrac{3x^2+22x-8}{x+1} \geq \dfrac{2x^2+12x+16}{x+2}$ (12 pts.)

Problema 2.

(2.1) Considere las funciones $f(x) = (2-x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } 1 < x < 9 \\ x-1 & \text{si } 9 \leq x \leq 16 \end{cases}$

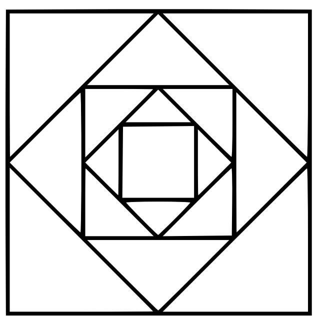
Determine el conjunto $\{x \in Dom\, f : f(x) \in Dom\, g\}$, es decir, determine $Dom(g \circ f)$ (10 pts.)

(2.2) Un punto x se escoge entre los números e y π. Suponga que $f(x)$ representa el largo mayor entre los largos de los trazos $\overline{e\,x}$ y $\overline{x\,\pi}$. Determine $f(x)$ como función de x, dibuje la gráfica de f y determine su recorrido (10 pts.)

Problema 3.

(3.1) Si $c < -2$, calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(c+1)^n + (c+2)^n}{(c+1)^{n+1} + (c+2)^{n+1}}$ (10 pts.)

(3.2) La siguiente figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión de cuadrados. El cuadrado exterior tiene **a** m^2 de área. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de todos los lados del cuadrado anterior. Calcule S_n, la suma de las áreas de los **n** primeros cuadrados de la sucesión y luego calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ (10 pts.)



INTRUCCIONES

- Debe responder cada uno de los 3 problemas en una hoja de cuadernillo distinta, si no responde alguna pregunta, igualmente debe entregar dicha hoja.
- En cada hoja de cuadernillo debe colocar: Nombre completo, nombre de su profesor, sección, número de la pregunta y fila.
- No se permite el uso de calculadoras, celulares ni reproductores de música.
- No se permiten preguntas personales.
- Posteriormente se puede solicitar recorrección solo si escribe con lápiz pasta.
- La duración de la prueba es de 2 horas.

PAUTA PEP I

Problema 1.

(1.1) Si $a<0$ fijo, resuelva la ecuación $-a\,|x+a| = |x+a|(8a+|x-\sqrt{-a}\,|^2\,)$ (8 pts.)

Es claro que una solución inmediata de la ecuación será $x=-a\in\mathbb{R}^+$, ya que, en ambos miembros de la igualdad aparece el factor $|x+a|$, que se anula en dicho valor. Luego si consideramos $x\neq -a$ tenemos

$$-a\,|x+a| = |x+a|(8a+|x-\sqrt{-a}\,|^2\,) \quad\Leftrightarrow\quad -a = 8a+|x-\sqrt{-a}\,|^2$$

$$\Leftrightarrow\quad -9a = |x-\sqrt{-a}\,|^2 \quad\Leftrightarrow\quad 3\sqrt{-a} = |x-\sqrt{-a}\,|$$

Notemos que la última ecuación es equivalente a

$$3\sqrt{-a} = x-\sqrt{-a} \quad\vee\quad -3\sqrt{-a} = x-\sqrt{-a}$$

De donde tenemos $x=4\sqrt{-a}\ \vee\ x=-2\sqrt{-a}$

Finalmente la solución de la ecuación está dada por el conjunto

$$S=\left\{-a\ ,4\sqrt{-a}\ ,-2\sqrt{-a}\right\}$$

(1.2) Resuelva la inecuación $\dfrac{3x^2+22x-8}{x+1} \geq \dfrac{2x^2+12x+16}{x+2}$ (12 pts.)

Escribimos la inecuación en la forma equivalente

$$\frac{3x^2+22x-8}{x+1} - \frac{2x^2+12x+16}{x+2} \geq 0;\ x\neq -1\ \wedge\ x\neq -2$$

$$\frac{3x^2+22x-8}{x+1} - \frac{2(x+4)(x+2)}{x+2} \geq 0;\ x\neq -1\ \wedge\ x\neq -2$$

Desarrollando (sujeto a la condición $x\neq -1\ \wedge\ x\neq -2$)

$$\frac{3x^2+22x-8-2(x+4)(x+1)}{x+1} \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+12x-16}{x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x^2+12x-16)(x+1)\geq 0$$

Entonces tenemos

$$\big(x-(-6+2\sqrt{13})\big)\big(x-(-6-2\sqrt{13})\big)\big(x+1\big)\geq 0$$

$$\big(x-(-6-2\sqrt{13})\big)\big(x-(-1)\big)\big(x-(-6+2\sqrt{13})\big)\geq 0$$

La solución es

$$S=[-6-2\sqrt{13}\,,-2[\,\cup\,]-2,-1[\,\cup\,[-6+2\sqrt{13}\,,+\infty[$$

Problema 2.

(2.1) Considere las funciones $f(x) = (2-x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } 1 < x < 9 \\ \\ x-1 & \text{si } 9 \leq x \leq 16 \end{cases}$

Determine el conjunto $\{x \in Dom\, f : f(x) \in Dom\, g\}$, es decir, determine $Dom(g \circ f)$ (10 pts.)

La función $g \circ f$ es

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -(2-x)^2 & \text{si } 1 < (2-x)^2 < 9 \\ \\ (2-x)^2 - 1 & \text{si } 9 \leq (2-x)^2 \leq 16 \end{cases}$$

Entonces se tiene $1 < (2-x)^2 < 9 \ \wedge \ 9 \leq (2-x)^2 \leq 16$, o equivalentemente $1 < (2-x)^2 \leq 16$. De esto tenemos dos casos a estudiar

- Caso 1:

$$(x-2)^2 \leq 16 \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 6$$

- Caso 2

$$1 < (x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < |x-2| \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \vee \quad x > 3$$

Finalmente la intersección de estas soluciones es el conjunto requerido, es decir,

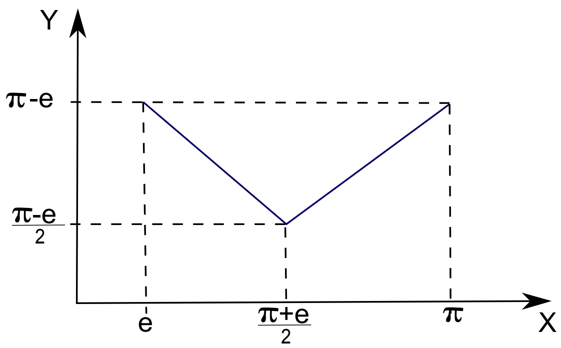
$$Dom(g \circ f) = [-2, 1[\, \cup \,]3, 6]$$

(2.2) Un punto x se escoge entre los números e y π. Suponga que $f(x)$ representa el largo mayor entre los largos de los trazos $\overline{e\,x}$ y $\overline{x\,\pi}$. Determine $f(x)$ como función de x, dibuje la gráfica de f y determine su recorrido (10 pts.)

Una forma de escribir la función es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } \mathrm{e} < x < \frac{\pi+\mathrm{e}}{2} \\ \\ x - \mathrm{e} & \text{si } \frac{\pi+\mathrm{e}}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Su gráfico es



Su recorrido es

$$Rec\ f = \left[\frac{\pi - \mathrm{e}}{2}, \pi - \mathrm{e}\right[$$

Problema 3.

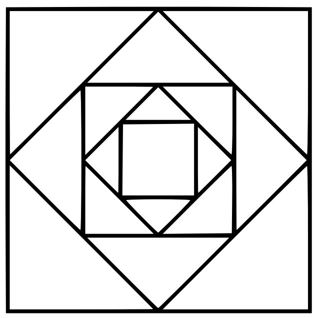
(3.1) Si $c < -2$, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(c+1)^n + (c+2)^n}{(c+1)^{n+1} + (c+2)^{n+1}}$ (10 pts.)

Si $c < -2$ se tiene $c+1 < 0$ y $c+2 < 0$, además se cumple que $0 < \frac{c+2}{c+1} < 1$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(c+1)^n + (c+2)^n}{(c+1)\cdot(c+1)^n + (c+2)\cdot(c+2)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(c+1)^n\left(1 + \frac{(c+2)^n}{(c+1)^n}\right)}{(c+1)^n\left((c+1) + (c+2)\cdot\frac{(c+2)^n}{(c+1)^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{c+2}{c+1}\right)^n}{(c+1) + (c+2)\cdot\left(\frac{c+2}{c+1}\right)^n} = \frac{1}{c+1}$$

(3.2) La siguiente figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión de cuadrados. El cuadrado exterior tiene **a** m^2 de área. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de todos los lados del cuadrado anterior. Calcule S_n, la suma de las áreas de los **n** primeros cuadrados de la sucesión y luego calcule $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (10 pts.)



Los lados de los primeros 5 cuadrados son :

$$L_1 = \sqrt{a}\ ,\ L_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\ ,\ L_3 = \frac{\sqrt{a}}{2}\ ,\ L_4 = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}\ ,\ L_5 = \frac{\sqrt{a}}{4}$$

Entonces la suma de las áreas de los n primeros cuadrados es:

$$S_n = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \frac{a}{16} + \cdots + \frac{a}{2^{n-1}} = a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$S_n = a\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = a\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2a\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Finalmente el límite es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2a\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2a$$