Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL I (versión A)

Problema 1. Dos puntos x_a y x_b se mueven sobre un mismo eje real de modo que su posición está dada en cada instante t, $t \geq 0$, por

$$x_a = \frac{2t}{|t-2| + |t-1|}; \quad x_b = \frac{1}{|t-2| + |t-1|}.$$

Determine el conjunto de todos los instantes para los cuales la distancia entre x_a y x_b es menor a 1. **(20 pts.)**

Problema 2. Encuentre todas las posibles dimensiones que puede tener el largo de un rectángulo que cumple con las siguientes condiciones:

i) El perímetro debe ser igual a 10 $[m]$.

ii) El área debe ser mayor que 3 $[m^2]$.

Problema 3. Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación:

$$\frac{14x^2 + 8x + 3}{2x - 1} < \frac{4x^2 + 13x + 3}{x + 3} \qquad \textbf{(20 pts.)}$$

PAUTA CONTROL I (versión A)

Problema 1. Dos puntos x_a y x_b se mueven sobre un mismo eje real de modo que su posición está dada en cada instante t, $t \geq 0$, por

$$x_a = \frac{2t}{|t-2|+|t-1|} \quad ; \quad x_b = \frac{1}{|t-2|+|t-1|}$$

Determine el conjunto de todos los instantes para los cuales la distancia entre x_a y x_b es menor a 1. **(20 pts.)** La distancia entre los puntos es dada por $d(x_a, x_b) = |x_a - x_b|$, luego debemos resolver la inecuación:

$$\left|\frac{2t}{|t-2|+|t-1|} - \frac{1}{|t-2|+|t-1|}\right| = \left|\frac{2t-1}{|t-2|+|t-1|}\right| < 1.$$

Lo anterior equivale también a resolver a desigualdad $|2t-1| < |t-2| + |t-1|$.

- Caso en que $0 \leq t < 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2t-1}{2t-3}\right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{2t-1}{2t-3} < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 < \frac{2t-1}{2t-3} \quad \wedge \quad \frac{2t-1}{2t-3} < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{4(t-1)}{2t-3} \quad \wedge \quad \frac{2}{2t-3} < 0 \\
&\Leftrightarrow 0 < (t-1)(t-\frac{3}{2}) \quad \wedge \quad 2t-3 < 0 \\
&\Leftrightarrow (t < 1) \vee \left(t > \frac{3}{2}\right) \wedge \left(t < \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Intersectando con el conjunto restricción se tiene que

$$S_I = \left[\left(]-\infty, 1[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\right) \cap \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\right] \cap [\,0, 1\,[= [\,0, 1\,[\,.$$

- Caso en que $1 < t < 2$.

$$\begin{aligned}
|2t-1| < 1 &\Leftrightarrow -1 < 2t-1 < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < 2t < 2 \\
&\Leftrightarrow 0 < t < 1
\end{aligned}$$

Intersectando con el conjunto restricción se tiene que

$$S_{II} = \emptyset.$$

- Caso en que $t > 2$. (Solución igual primer caso)

  Intersectando con el conjunto restricción se tiene que

$$S_{III} \equiv \emptyset.$$

Finalmente la unión de los conjuntos S_I, S_{II} y S_{III} es la solución de la inecuación

$$S_F = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} = \ [\ 0, 1\ [\ .$$

Problema 2. Un rectángulo tiene perímetro igual a 10 $[m]$. Determine los valores del largo del rectángulo para los cuales el área de este sea mayor a 3 $[m^2]$. **(20 pts.)**

Consideremos que el largo y el ancho del rectángulo son x e y respectivamente. Tenemos que $2x + 2y = 10 \ \Leftrightarrow \ x + y = 5 \ \Leftrightarrow \ y = 5 - x$.

El área del rectángulo será $A = x \cdot y = x(5 - x)$. Por lo tanto, debemos encontrar la solución de la inecuación:

$$\begin{aligned}
x(5-x) > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 3 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left]\ \frac{5-\sqrt{13}}{2}\ ,\ \frac{5+\sqrt{13}}{2}\ \right[
\end{aligned}$$

Problema 3. Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación **(20 pts.)**

$$\frac{14x^2 + 8x + 3}{2x - 1} < \frac{4x^2 + 13x + 3}{x + 3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{14x^2+8x+3}{2x-1} < \frac{4x^2+13x+3}{x+3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{14x^2+8x+3}{2x-1} - \frac{(x+3)(4x+1)}{x+3} < 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{6x^2+10x+4}{2x-1} < 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{6(x+1)(x+\frac{2}{3})}{2(x-\frac{1}{2})} < 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-(-1))(x-(-\frac{2}{3}))(x-\frac{1}{2}) < 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left((\ ]-\infty, -1[- \{-3\}) \ \cup \ \left]\frac{-2}{3}, \frac{1}{2}\right[\right)
\end{aligned}$$