Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL I (versión B)

Problema 1. Dos puntos x_a y x_b se mueven sobre un mismo eje real de modo que su posición está dada en cada instante t, $t \geq 0$, por

$$x_a = \frac{1}{|1-t|+|t-2|}; \quad x_b = \frac{2t}{|1-t|+|t-2|}.$$

Determine el conjunto de todos los instantes para los cuales la distancia entre x_a y x_b es mayor a 1. **(20 pts.)**

Problema 2. Encuentre todas las posibles dimensiones que puede tener el largo de un rectángulo que cumple con las siguientes condiciones: **(20 pts.)**

i) El perímetro debe ser igual a 10 $[m]$.

ii) El área debe ser menor que 3 $[m^2]$.

Problema 3. Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación:

$$\frac{14x^2+8x+3}{2x-1} \geq \frac{4x^2+13x+3}{x+3} \qquad \textbf{(20 pts.)}$$

PAUTA CONTROL I (versión B)

Problema 1. Dos puntos x_a y x_b se mueven sobre un mismo eje real de modo que su posición está dada por en cada instante t, $t \geq 0$, por

$$x_a = \frac{1}{|1-t|+|t-2|}; \quad x_b = \frac{2t}{|1-t|+|t-2|}.$$

Determine el conjunto de todos los instantes para los cuales la distancia entre x_a y x_b es mayor a 1. **(20 pts.)**

La distancia entre los puntos es dada por $d(x_a, x_b) = |x_a - x_b|$, luego debemos resolver la inecuación:

$$\left|\frac{2t}{|t-2|+|t-1|} - \frac{1}{|t-2|+|t-1|}\right| = \left|\frac{2t-1}{|t-2|+|t-1|}\right| > 1$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos

- Caso en que $0 \leq t < 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2t-1}{2t-3}\right| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2t-1}{2t-3} < -1 \quad \vee \quad \frac{2t-1}{2t-3} > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4(t-1)}{2t-3} < 0 \quad \vee \quad \frac{2}{2t-3} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-1)(t-\frac{3}{2}) < 0 \quad \vee \quad 2t-3 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 < t < \frac{3}{2}\right) \quad \vee \quad \left(t > \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

  Intersectando con la condición $0 \leq t < 1$, se tiene que

$$S_I = \emptyset.$$

- Caso en que $1 < t < 2$.

$$\begin{aligned}
|2t-1| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2t-1 < -1 \quad \vee \quad 2t-1 > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (t < -1) \quad \vee \quad (t > 1)
\end{aligned}$$

  Intersectando con la condición $1 < t < 2$, se tiene que

$$S_{II} =]\, 1, 2\, [.$$

- Caso en que $t \geq 2$. (Solución igual primer caso)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2t-1}{2t-3}\right| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2t-1}{2t-3} < -1 \quad \vee \quad \frac{2t-1}{2t-3} > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 < t < \frac{3}{2}\right) \quad \vee \quad \left(t > \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Intersectando con la condición $t \geq 2$, se tiene que

$$S_{III} = \ [\ 2, +\infty\ [.$$

Finalmente la unión de los conjuntos S_I, S_{II} y S_{III} es la solución de la inecuación.

$$S_F = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} = \ ]\ 1, +\infty\ [\ .$$

Problema 2. Un rectángulo tiene perímetro igual a 10 $[m]$. Determine los valores del largo del rectángulo para los cuales el área de este sea menor a 3 $[m^2]$. **(20 pts.)**

Consideremos que el ancho y el largo del rectángulo son x y y. Tenemos que $2x + 2y = 10 \Leftrightarrow x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x$.

El área del rectángulo será $A = x \cdot y = x(5 - x)$. Por lo tanto, debemos encontrar la solución de la inecuación:

$$\begin{aligned}
x(5-x) < 3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 3 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right[
\end{aligned}$$

Finalmente, las dimensiones de $x, y \in \mathbb{R}^+$, esto es: $y = 5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$, por lo tanto, el conjunto solución es:

$$x \in \left]0, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, 5\right[$$

Problema 3. Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación **(20 pts.)**

$$\frac{14x^2 + 8x + 3}{2x - 1} \geq \frac{4x^2 + 13x + 3}{x + 3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{14x^2 + 8x + 3}{2x - 1} \geq \frac{4x^2 + 13x + 3}{x + 3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{14x^2 + 8x + 3}{2x - 1} - \frac{(x+3)(4x+1)}{x+3} \geq 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{6x^2 + 10x + 4}{2x - 1} \geq 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{6(x+1)(x + \frac{2}{3})}{2(x - \frac{1}{2})} \geq 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad (x - (-1))(x - (-\frac{2}{3}))(x - \frac{1}{2}) \geq 0 \quad ; \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -3
\end{aligned}$$

La solución final es

$$x \in \left[-1, \frac{-2}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$