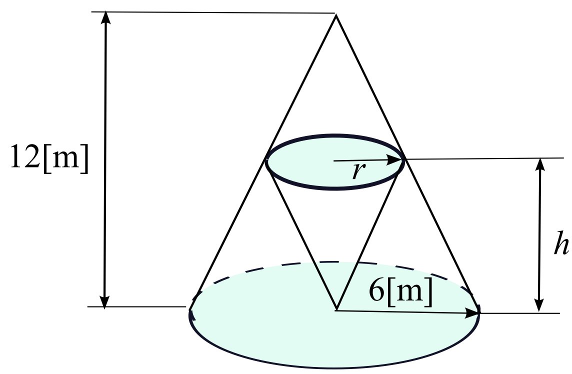
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL II (versión A)

Problema 1. La figura siguiente muestra dos conos circulares rectos, uno boca abajo del otro. Las dos bases son paralelas y el vértice del cono menor está en el centro de la base del cono mayor.



a) Determine el volumen del cono interior en función del radio r, denote el volumen por $V(r)$. **(10 pts.)**

b) Calcule $V(\pi)$. **(5 pts.)**

c) Encuentre el dominio de $V(r)$. **(5 pts.)**

Problema 2. Determine el(los) valor(es) de c para que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3c+1}{2}\right)+\left(\frac{3c+1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3c+1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

exista, además calcule el valor del límite. **(20 pts.)**

Problema 3. Considere la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ x\in\,]-\infty\ ,\ 0\,]$.

a) Encuentre el $Rec\ f$. **(10 pts.)**

b) ¿f es inyectiva? Justifique. **(3 pts.)**

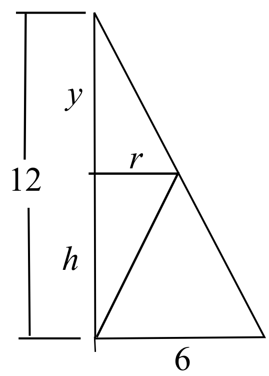
c) Verifique que $f(-1)\leq f(x)$, para todo $x\in\,]-\infty\ ,\ 0\,]$. **(7 pts.)**

PAUTA CONTROL II (versión A)

Problema 1. La figura siguiente muestra dos conos circulares rectos, uno boca abajo del otro. Las dos bases son paralelas y el vértice del cono menor está en el centro de la base del cono mayor.

a) Determine el volumen del cono interior en función del radio r, denote el volumen por $V(r)$. **(10 pts.)**

El volumen del cono interior es $V(r,h) = \dfrac{\pi}{3}r^2 h$.



Las cantidades r e y (ver figura) se relacionan mediante triángulos semejantes verificando la relación: $\dfrac{y}{r} = \dfrac{12}{6} \Leftrightarrow y = 2r$. Por lo tanto, la relación entre r y h es:

$$h = 12 - y = 12 - 2r$$

El volumen en función de r es

$$V(r) = 4\pi r^2 - \frac{2\pi}{3}r^3$$

b) Calcule $V(\pi)$. **(5 pts.)**

$$V(\pi) = 4\pi^3 - \frac{2\pi^4}{3} = 2\pi^3\left(2 - \frac{\pi}{3}\right) \quad [m^3]$$

c) Encuentre el dominio de $V(r)$. **(5 pts.)**

$$Dom\ V =]0,6[.$$

Problema 2. Determine el(los) valor(es) de c para que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3c+1}{2}\right) + \left(\frac{3c+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3c+1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

exista, además calcule el valor del límite. **(20 pts.)**

Notar que el límite se puede escribir como

$$\left(\frac{3c+1}{2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{1 + \left(\frac{3c+1}{2}\right) + \left(\frac{3c+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3c+1}{2}\right)^n}_{a_n}\right)$$

Luego, la sucesión a_n tiene la forma

$$a_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n,$$

con $r = \dfrac{3c+1}{2}$.

Esta sucesión es convergente siempre que

$$|r| < 1 \iff \left|\frac{3c+1}{2}\right| < 1 \iff c \in \left]-1, \frac{1}{3}\right[.$$

Y el valor para el límite dada esta condición es:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + r + r^2 + \ldots + r^n\right) = \frac{1}{1-r}$$

En consecuencia

$$\left(\frac{3c+1}{2}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{3c+1}{2}\right) + \left(\frac{3c+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3c+1}{2}\right)^n\right) = \frac{3c+1}{1-3c}.$$

Problema 3. Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in]-\infty\ ,\ 0\ ]$.

a) Encuentre el *Rec f*. **(10 pts.)**

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{x^2+1} &\Leftrightarrow yx^2 + y = x \\ &\Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \end{aligned}$$

La expresión $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$, define un número real, si y solo si, $y \neq 0$ y $1 - 4y^2 \geq 0$, además, $y \leq 0$. Esto último es equivalente a $y \neq 0$ y $y \in \left[-\frac{1}{2}\ ,\ 0\ \right]$. Además note que si $x = 0 \implies y = 0$.

Por lo tanto concluimos que

$$Rec\ f = \left[-\frac{1}{2}\ ,\ 0\ \right].$$

b) ¿f es inyectiva? Justifique. **(3 pts.)**

La función no es inyectiva, ya que, para $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = -3$, tenemos que $f(-\frac{1}{3}) = f(-3) = -\frac{3}{10}$, contradiciendo la definición de inyectividad (Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

c) Verifique que $f(-1) \leq f(x)$, para todo $x \in]-\infty\ ,\ 0\ ]$. **(7 pts.)**

Tenemos que $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, luego debemos resolver la inecuación

$$\frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2} \iff 2x \geq -(x^2+1) \iff (x+1)^2 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}.$$

Y en particular se verifica para el intervalo $]-\infty\ ,\ 0\ ] \subset \mathbb{R}$.