Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL II (versión B)

Problema 1. A cada triángulo rectángulo de perímetro 10 metros y catetos de longitudes x, z metros, se le calcula su área.

a) Determine el área del triángulo en función de x, denote el área por $A(x)$. **(10 pts.)**

b) Calcule $A(2)$. **(5 pts.)**

c) Encuentre el dominio de $A(x)$. **(5 pts.)**

Problema 2. Considere la función $f(x) = x^2$, $x \in [0, b]$, b número real positivo fijo.

a) Grafique f. **(1 pts.)**

b) Suponga que $a_0 = 0$, $a_k = \frac{k}{3}b$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Grafique los rectángulos R_k, cuya base es el intervalo $[\ a_{k-1}, a_k\ [$ y altura $f(a_k)$, para $k \in \{1, 2, 3\}$. **(2 pts.)**

c) Si A_k es el área del rectángulo R_k, calcule $A_1 + A_2 + A_3$. **(2 pts.)**

d) Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, se definen: $a_0 = 0$, $a_k = \frac{k}{n}b$, con $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Si R_k es el rectángulo de base $[\ a_{k-1}, a_k\ [$ y altura $f(a_k)$, y A_k es su área, calcule (en función de n) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$. **(7 pts.)**

e) Determine el valor de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$. **(6 pts.)**

f) Interprete el valor del límite encontrado en e). **(2 pts.)**

Nota: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Problema 3. Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}$, $x \in\ ]-\infty\ ,\ 0\ ]$.

a) Encuentre el *Rec* f. **(10 pts.)**

b) ¿f es inyectiva? Justifique. **(3 pts.)**

c) Verifique que f es creciente en el intervalo $]-\sqrt{5}\ ,\ 0\ ]$. **(7 pts.)**

PAUTA CONTROL II (versión B)

Problema 1. A cada triángulo rectángulo de perímetro 10 metros y catetos de longitudes x, z metros, se le calcula su área.

a) Determine el área del triángulo en función de x, denote el área por $A(x)$. **(10 pts.)**

Sea, H, la hipotenusa del triángulo rectángulo, entonces $H^2 = x^2 + z^2$.

Por otro lado, del perímetro tenemos que $H = 10 - (x+z)$, luego $H^2 = 100 - 20(x+z) + (x+z)^2$. Igualando estas expresiones, tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 = 100 - 20(x+z) + (x+z)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 100 - 20(x+z) + 2xz = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2xz - 20z = 20x - 100 \\ &\Leftrightarrow \quad 2z(x-10) = 20(x-5) \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{10(x-5)}{x-10} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función pedida es

$$A(x) = \frac{5x(x-5)}{x-10}.$$

b) Calcule $A(2)$. **(5 pts.)**

$$A(2) = \frac{5 \cdot 2 \cdot (2-5)}{2-10} = \frac{15}{4}.$$

c) Encuentre el dominio de $A(x)$. **(5 pts.)**

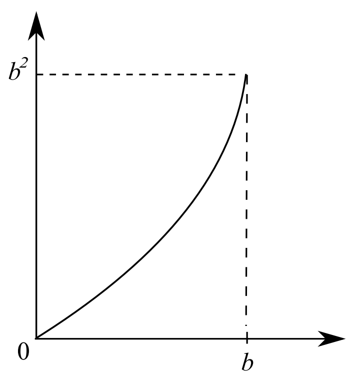
$$Dom\ A =]0, 5[.$$

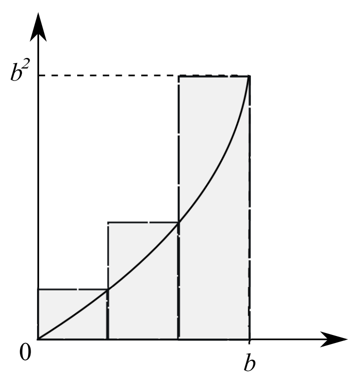
Problema 2. Considere la función $f(x) = x^2$, $x \in [0, b]$, b número real positivo fijo.

a) Grafique f. **(1 pts.)**

b) Suponga que $a_0 = 0$, $a_k = \frac{k}{3}b$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Grafique los rectángulos R_k, cuya base es el intervalo $[\ a_{k-1}, a_k\ [$ y altura $f(a_k)$, para $k \in \{1, 2, 3\}$. **(2 pts.)**

$a_0 = 0$, $a_1 = \frac{b}{3}$, $a_2 = \frac{2b}{3}$, $a_3 = b$. Los intervalos son $I_1 = [0, \frac{b}{3}[$, $I_2 = [\frac{b}{3}, \frac{2b}{3}[$, $I_3 = [\frac{2b}{3}, b[$





c) Si A_k es el área del rectángulo R_k, calcule $A_1 + A_2 + A_3$. **(2 pts.)**

El área $A_k = (a_k - a_{k-1})f(a_k)$, entonces

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{b}{3} \cdot \frac{b^2}{9} + \frac{b}{3} \cdot \frac{4b^2}{9} + \frac{b}{3} \cdot b^2 = \frac{14}{27}b^3.$$

d) Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, se definen: $a_0 = 0$, $a_k = \frac{k}{n}b$, con $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Si R_k es el rectángulo de base $[\ a_{k-1}, a_k\ [$ y altura $f(a_k)$, y A_k es su área, calcule (en función de n) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$. **(7 pts.)**

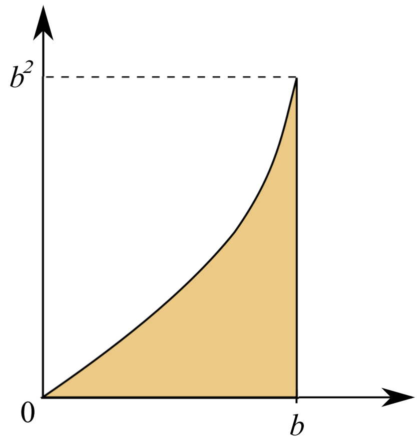
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left(\frac{k}{n}b\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

e) Determine el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. **(6 pts.)**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{b^3}{3}$$

f) Interprete el valor del límite encontrado en e). **(2 pts.)**

El límite representa el área bajo la curva $f(x) = x^2$



Problema 3. Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 5}$, $x \in\ ] - \infty\ ,\ 0\ ]$.

a) Encuentre el *Rec* f. **(10 pts.)**

$$\begin{aligned} y = \frac{2x}{x^2+5} &\Leftrightarrow\ yx^2 + 5y = 2x \\ &\Leftrightarrow\ yx^2 - 2x + 5y = 0 \\ &\Leftrightarrow\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20y^2}}{2y} \\ &\Leftrightarrow\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 5y^2}}{y} \end{aligned}$$

La expresión $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-5y^2}}{y}$, define un número real, si y solo si, $y \neq 0$ y $1-5y^2 \geq 0$. Esto último es equivalente a $y \neq 0$ y $y \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}} \ , \ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$. Pero $y \leq 0$ y como $x = 0$ implica que $y = 0$, entonces concluimos que

$$Rec \ f = \left[-\frac{1}{\sqrt{5}} \ , \ 0\right].$$

b) ¿f es inyectiva? Justifique. **(3 pts.)**

La función no es inyectiva, ya que, para $x_1 = -1$ y $x_2 = -5$, tenemos que $f(-1) = f(-5) = -\frac{1}{3}$, contradiciendo la definición de inyectividad (Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

c) Verifique que f es creciente en el intervalo $]-\sqrt{5} \ , \ 0 \ ]$. **(7 pts.)**

Sean $x_1, \ x_2 \ \in \ ]-\sqrt{5} \ , \ 0 \ [$, tal que, $x_1 < x_2$, es decir, $x_1 - x_2 < 0$.

$$f(x_1) \leq f(x_2) \ \Leftrightarrow \ \frac{x_1}{x_1^2+5} < \frac{x_2}{x_2^2+5} \ \Leftrightarrow \ 0 \leq \frac{x_2(x_1^2+5) - x_1(x_2^2+5)}{(x_1^2+5)(x_2^2+5)} \ \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x_1x_2(x_1-x_2) - 5(x_1-x_2) \ \Leftrightarrow \ 0 \leq (x_1-x_2)(x_1x_2-5) \ \Leftrightarrow \ 0 \leq x_1x_2 - 5 \ \Leftrightarrow \ 5 \leq x_1x_2.$$

Pero, $x_1, \ x_2 \ \in \ ]-\sqrt{5} \ , \ 0 \ [$, por lo que $5 \leq x_1x_2$.