Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL III (versión A)

Problema 1. Sea $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$. Determine los siguientes conjuntos.

1.1) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$ **(4 pts.)**

1.2) $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) = 0\}$ **(9 pts.)**

1.3) $C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) < 0\}$ **(10 pts.)**

1.4) $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f''(x) > 0\}$ **(12 pts.)**

Problema 2. Calcule (si existe):

2.1) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h} \cdot (1 - \cos h)}{h}$ **(13 pts.)**

2.2) $f'(0)$ si $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (1 - \cos x)$ **(12 pts.)**

PAUTA CONTROL III (versión A)

Problema 1. Sea $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$. Determine los siguientes conjuntos.

1.1) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$ **(4 pts.)**

$$f(x) = 0 \iff \frac{8x}{x^2+4} = 0 \iff x = 0 \quad , \text{ así } \ A = \{0\} \ .$$

1.2) $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) = 0\}$ **(9 pts.)**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8(x^2+4) - 8x(2x)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2} \ . \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2} = 0 \iff x = \pm 2 \quad , \text{ así } \ B = \{-2 \ , \ 2\} \ .$$

1.3) $C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) < 0\}$ **(10 pts.)**

$$f'(x) < 0 \iff \frac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2} < 0 \iff 4 - x^2 < 0 \quad , \text{ así } \ C = \,]-\infty, -2[\, \cup \,]2 \ , \ +\infty[\ .$$

1.4) $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f''(x) > 0\}$ **(12 pts.)**

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-16x(x^2+4)^2 - 8(4-x^2)2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{16x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \ . \end{aligned}$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{16x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} > 0 \iff x(x^2-12) > 0 \quad , \text{ así } \ D = \,]-\sqrt{12}, 0[\, \cup \,]\sqrt{12}, +\infty[.$$

Problema 2. Calcule (si existe).

2.1) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} \cdot (1 - \cos h)}{h}$. **(13 pts.)**

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\cdot(1-\cos h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\cdot(1-\cos h)}{h}\cdot\frac{1+\cos h}{1+\cos h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\cdot(1-\cos^2 h)}{h(1+\cos h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^4}}{1+\cos h}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h^2} \\
&= \frac{0}{1+1}\cdot 1^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

2.2) $f'(0)$, si $f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot(1-\cos x)$. **(12 pts.)**

Usando 2.1) se obtiene que

$$
f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot(1-\cos x)}{x} = 0.
$$