Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL III (versión B)

Problema 1. Sea $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+4}$. Determine los siguientes conjuntos.

1.1) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$ **(3 pts.)**

1.2) $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) = 0\}$ **(8 pts.)**

1.3) $C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) > 0\}$ **(10 pts.)**

1.4) $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f''(x) < 0\}$ **(12 pts.)**

Problema 2. Sea $f(x) = \begin{cases} c(x-2)+d & \text{si } x \leq 1 \\ c(x-2)^3 + x - 2 + 2d & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2.1) ¿Para que valores de c y d, f es continua en $x = 1$? **(6 pts.)**

2.2) Calcule $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ **(9 pts.)**

2.3) ¿Para que valores de c y d, $f'(1)$ existe? **(12 pts.)**

PAUTA CONTROL III (versión B)

Problema 1. Sea $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+4}$. Determine los siguientes conjuntos.

1.1) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$ **(3 pts.)**

$$f(x) = 0 \iff \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+4} = 0 \iff x - 1 = 0 \quad , \text{ así } \ A = \{1\} \ .$$

1.2) $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) = 0\}$ **(8 pts.)**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2((x-1)^2+4) - 2(x-1)2(x-1)}{\big((x-1)^2+4\big)^2} \\ &= \frac{-2(x^2-2x-3)}{\big((x-1)^2+4\big)^2} \\ &= \frac{-2(x-3)(x+1)}{\big((x-1)^2+4\big)^2} \ . \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-2(x-3)(x+1)}{\big((x-1)^2+4\big)^2} = 0 \iff x = -1 \ \vee \ x = 3 \quad , \text{ así } \ B = \{-1 \ , \ 3\} \ .$$

1.3) $C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) > 0\}$ **(10 pts.)**

$$f'(x) > 0 \iff \frac{-2(x-3)(x+1)}{\big((x-1)^2+4\big)^2} > 0 \iff (x-3)(x+1) < 0 \quad , \text{ así } \ C = \,]-1 \ , \ 3[\ .$$

1.4) $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f''(x) < 0\}$ **(12 pts.)**

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(2x-2)\big((x-1)^2+4\big)^2 + 2(x^2-2x-3)2((x-1)^2+4)2(x-1)}{\big((x-1)^2+4\big)^4} \\ &= \frac{4(x-1)((x-1)^2+4)[-(x-1)^2 - 4 + 2(x^2-2x-3)]}{\big((x-1)^2+4\big)^4} \\ &= \frac{4(x-1)(x^2-2x-11)}{\big((x-1)^2+4\big)^3} \\ &= \frac{4(x-1)\big(x-(1-2\sqrt{3})\big)\big(x-(1+2\sqrt{3})\big)}{\big((x-1)^2+4\big)^3}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$f''(x) < 0 \iff \big(x-(1-2\sqrt{3})\big)(x-1)\big(x-(1+2\sqrt{3})\big) < 0 \,, \text{ así } D = \,]-\infty, 1-2\sqrt{3}[\,\cup\,]1, \ 2+3\sqrt{3}[\ .$$

Problema 2. Sea $f(x) = \begin{cases} c(x-2)+d & \text{si } x \leq 1 \\ c(x-2)^3 + x - 2 + 2d & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

2.1) ¿Para que valores de c y d, f es continua en $x = 1$? **(6 pts.)**

Para la continuidad de f, estudiamos los limites laterales:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} c(x-2)+d = -c+d$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} c(x-2)^3 + x - 2 + 2d = -c - 1 + 2d$

Igualando los limites concluimos tenemos $-c+d = -c-1+2d \quad \Rightarrow \quad d = 1$, con este valor la función $f(x)$ es continua en $x = 1$ (note que c es arbitrario).

2.2) Calcule $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ **(9 pts.)**

Considerando el valor $d = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{c((1+h)-2)^3 + (1+h) - 2 + 2 - (-c+1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{c(h-1)^3 + h + c}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{c[(h-1)^3 + 1] + h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{c(h^3 - 3h^2 + 3h) + h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} c(h^2 - 3h + 3) + 1 \\
&= 3c + 1.
\end{aligned}$$

2.3) ¿Para que valores de c y d, $f'(1)$ existe? **(12 pts.)**

Para que sea derivable en el punto $x = 1$ debe ser continua, por lo tanto usamos nuevamente el valor $d = 1$. Ahora, calculamos la derivada por la izquierda, que es dada por:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{c(1+h-2) + 1 - (-c+1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{c\,h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} c \\
&= c.
\end{aligned}$$

Igualando éste resultado con el del item 2.2 tenemos que

$$3c + 1 = c \quad \Longleftrightarrow \quad c = -\frac{1}{2}\,.$$