Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL IV (versión A)

Problema 1. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

(1.1) Determine su dominio, ceros si existen, signo y paridad.

$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \ :\ x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ :\ x \neq -1 \ \vee \ x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$Ceros\ f = \{x \in \mathbb{R} \ :\ \frac{x}{x^2-1} = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ :\ x = 0\} = \{0\}$.

Signo f

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \ &\Leftrightarrow\ \frac{x}{x^2-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow\ (x-(-1))(x-0)(x-1) > 0 \quad ;\ x \neq -1 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow\ x \in \ ]-1, 0[\ \cup \ ]1, +\infty[\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) < 0 \ &\Leftrightarrow\ \frac{x}{x^2-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow\ (x-(-1))(x-0)(x-1) < 0 \quad ;\ x \neq -1 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow\ x \in \ ]-\infty, -1[\ \cup \ ]0, 1[\ . \end{aligned}$$

f *es impar, en efecto*: $\quad f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} = -f(x)$.

(1.2) Analice el crecimiento de f y sus máximos y mínimos.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Puntos críticos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \ &\Longleftrightarrow\ \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = 0 \\ &\Longrightarrow\ \text{solución vacía.} \end{aligned}$$

En consecuencia no hay máximos ni mínimos locales.

Análisis de crecimiento. Notemos que el signo de $f'(x)$ es negativo para todo $x \in Dom\ f$. Por lo tanto, la función es decreciente en todo su dominio.

(1.3) Analice la concavidad de f y sus puntos de inflexión.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(2x)(x^2-1)^2-(x^2+1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Posibles puntos de inflexión:

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\iff \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \\ &\iff x=0 \end{aligned}$$

Además, son posibles puntos de inflexión los valores $x=-1$ y $x=1$.

Análisis de concavidad. Notemos que el signo de $f''(x)$ depende solo del signo de la cantidad $\frac{x}{(x^2-1)^3}$, lo que es equivalente en signo a $(x-(-1))(x-0)(x-1)>0$ (ver signo de f en item [1.1]), luego:

$f''(x)>0 \iff x\in\ ]-1,0[\ \cup\ ]1,+\infty[$. Entonces f es cóncava hacia arriba $\smile$.

$f''(x)<0 \iff x\in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]0,1[$. Entonces f es cóncava hacia abajo $\frown$.

En consecuencia, $x=0$ es punto de inflexión (en los puntos $x=-1$ y $x=1$ hay cambio de concavidad, pero estos puntos no están en el dominio de la función, por lo que no se consideran como puntos de inflexión).

(1.4) Determine asíntotas (si existen) y bosqueje el gráfico de f.

- Asíntotas Horizontales:

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ concluimos que la recta $y=0$ es Asíntota Horizontal hacia la izquierda y derecha del gráfico de f.

- Asíntotas Verticales:

Como $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty$ tenemos que las rectas verticales $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales al gráfico de f.

Problema 2. Sea g función tal que $Dom\ g=[-3;3]$, continua en $]-3,3[$. Si $g(0)=0$; $g'(1)=\frac{5}{6}$ y, para todo $x\in]-3;3[$, $g''(x)=(x+1)(x-2)$.

Notemos que

$$g''(x)=(x+1)(x-2)=x^2-x-2\ ,$$

intuitivamente podemos obtener que $g'(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C_1$, donde C_1 es una constante por determinar, como $g'(1)=\frac{5}{6}$ tenemos

$$g'(1)=\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}-2\cdot1+C_1=\frac{5}{6}\implies C_1=3\ .$$

Por lo tanto

$$g'(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+3=\frac{(2x-3)(x^2-6)}{6}\ .$$

Análogamente, podemos deducir que $g(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + C_2$, donde C_c es una constante por determinar, como $g(0) = 0$ tenemos

$$g(0) = \frac{0^4}{12} - \frac{0^3}{6} - 0^2 + 3 \cdot 0 + C_2 = 0 \implies C_2 = 0 \ .$$

Por lo tanto

$$g(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x \ .$$

(2.1) Analice el crecimiento de g y sus máximos y mínimos.

La primera derivada y los posibles máximos y/o mínimos para g.

$$g'(x) \quad = \quad \frac{(2x-3)(x^2-6)}{6}$$

Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \quad &\iff \quad (2x-3)(x^2-6) = 0 \\ &\iff \quad x = \frac{3}{2} \ \vee \ x = -\sqrt{6} \ \vee \ x = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Intervalos de crecimiento (signo de la primera derivada).

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 \quad &\iff \quad (2x-3)(x^2-6) > 0 \\ &\iff \quad (x - (-\sqrt{6}))(x - \frac{3}{2})(x - \sqrt{6}) > 0 \\ &\iff \quad x \in \,]-\sqrt{6}, \frac{3}{2}[\, \cup \,]\sqrt{6}, +\infty[\end{aligned}$$

Intersectando con el *Dom* g, se obtiene que

$$x \in \,]-\sqrt{6}, \frac{3}{2}[\, \cup \,]\sqrt{6}, 3[$$

En éste intervalo g es creciente $\nearrow$.

Análogamente obtenemos

$$g'(x) < 0 \quad \iff \quad x \in \,]-\infty, -\sqrt{6}[\, \cup \,]\frac{3}{2}, \sqrt{6}[$$

Intersectando con el *Dom* g

$$x \in \,]-3, -\sqrt{6}[\, \cup \,]\frac{3}{2}, \sqrt{6}[$$

En éste intervalo f es decreciente $\searrow$.

En consecuencia, por el criterio de la primera derivada para máximos y mínimos tenemos que: en $x = \frac{3}{2}$, g tiene un máximo local y en $x = -\sqrt{6}$; $x = \sqrt{6}$, g tiene un mínimo local.

(2.2) Analice la concavidad de g y sus puntos de inflexión.

La segunda derivada y los posibles puntos de inflexión para f.

$$g''(x) \quad = \quad (x+1)(x-2)$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
g''(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x+1)(x-2) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -1 \ \vee \ x = 2
\end{aligned}
$$

Intervalos de concavidad (signo de la segunda derivada).

$$
\begin{aligned}
g''(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x+1)(x-2) > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in]-\infty, -1[\,\cup\,]2, +\infty[
\end{aligned}
$$

Intersectando con el $Dom\ g$

$$x \in]-3, -1[\,\cup\,]2, 3[$$

En éste intervalo g es cóncava hacia arriba $\smile$.

Análogamente obtenemos que en el intervalo]-1, 2[, g es cóncava hacia abajo $\frown$.

Además podemos notar que $x = -1$ y $x = 2$ son puntos de inflexión.

(2.3) Bosqueje el gráfico de $g(x)$.