Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura: Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria
Primer Semestre 2013

CONTROL IV (versión B)

Problema 1. Sea $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$.

(1.1) Determine su dominio, ceros si existen, signo y paridad.

$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 9 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq -3 \ \vee \ x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

$Ceros\ f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{2x}{x^2-9} = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = 0\} = \{0\}$.

Signo f

$$
\begin{aligned}
f(x) > 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{2x}{x^2-9} > 0 \\
&\Leftrightarrow \ (x-(-3))(x-0)(x-3) > 0 \quad ; \ x \neq -3 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 3 \\
&\Leftrightarrow \ x \in \ ]-3, 0[\ \cup \ ]3, +\infty[\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) < 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{2x}{x^2-3} < 0 \\
&\Leftrightarrow \ (x-(-3))(x-0)(x-3) < 0 \quad ; \ x \neq -3 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 3 \\
&\Leftrightarrow \ x \in \ ]-\infty, -3[\ \cup \ ]0, 3[\ .
\end{aligned}
$$

f es impar ya que $\quad f(-x) = \frac{(-2x)}{(-x)^2-9} = \frac{-2x}{x^2-9} = -f(x)$.

(1.2) Analice el crecimiento de f y sus máximos y mínimos.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(x^2-9) - 2x(2x)}{(x^2-9)^2} \\
&= \frac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2}
\end{aligned}
$$

Puntos críticos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \ &\Longleftrightarrow \ \frac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2} = 0 \\
&\Longrightarrow \ \text{solución vacía.}
\end{aligned}
$$

En consecuencia no hay máximos ni mínimos locales.

Análisis de crecimiento. Notemos que el signo de $f'(x)$ es negativo para todo $x \in Dom\ f$. Por lo tanto, la función es decreciente en todo su dominio.

(1.3) Analice la concavidad de f y sus puntos de inflexión.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(4x)(x^2-9)^2 - 2(x^2+9)2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} \\ &= \frac{4x(x^2+27)}{(x^2-9)^3} \end{aligned}$$

Posibles puntos de inflexión:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff \frac{4x(x^2+27)}{(x^2-9)^3} = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Además, son posibles puntos de inflexión los valores $x = -3$ y $x = 3$.

Análisis de concavidad. Notemos que el signo de $f''(x)$ depende solo del signo de la cantidad $\frac{x}{(x^2-9)^3}$, lo que es equivalente en signo a $(x-(-3))(x-0)(x-3) > 0$ (ver signo de f en item [1.1]), luego:

$f''(x) > 0 \iff x \in \,]-3,0[\, \cup \,]3,+\infty[\,$. Entonces f es cóncava hacia arriba $\smile$.

$f''(x) < 0 \iff x \in \,]-\infty,-3[\, \cup \,]0,3[\,$. Entonces f es cóncava hacia abajo $\frown$.

En consecuencia, $x = 0$ es punto de inflexión (en los puntos $x = -3$ y $x = 3$ hay cambio de concavidad, pero estos puntos no están en el dominio de la función, por lo que no se consideran como puntos de inflexión).

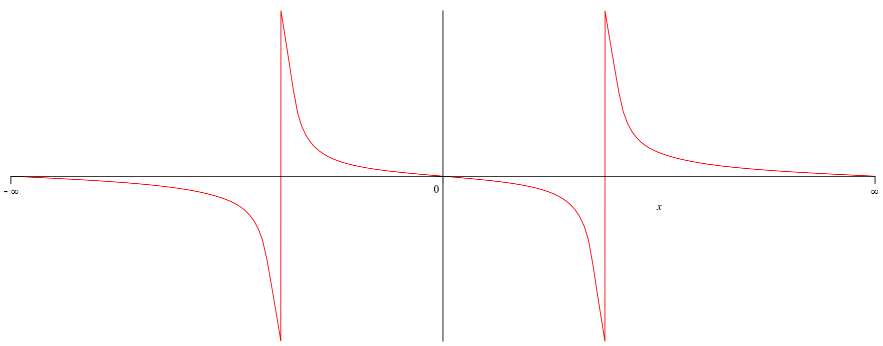
(1.4) Determine asíntotas (si existen) y bosqueje el gráfico de f.

- Asíntotas Horizontales:

Como $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-3} = 0$ concluimos que la recta $y = 0$ es Asíntota Horizontal hacia la izquierda y derecha del gráfico de f.

- Asíntotas Verticales:

Como $\displaystyle\lim_{x\to-3^+} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to3^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to-3^-} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to3^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$ tenemos que las rectas verticales $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales al gráfico de f.



Problema 2. Sea h función tal que $Dom\ h = [-4;4]$, continua en $]-4,4[$. Si $h(0) = 1$; $h'(1) = \frac{5}{2}$ y, para todo $x \in]-4;4[$, $h''(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

Notemos que

$$h''(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2) \ ,$$

intuitivamente podemos saber que $h'(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 6x + C_1$, donde C_1 es una constante por determinar, como $h'(1) = \frac{5}{2}$ tenemos

$$h'(1) = 1^3 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} - 6 \cdot 1 + C_1 = \frac{5}{2} \implies C_1 = 9 \; .$$

Por lo tanto

$$h'(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 6x + 9 = \frac{(2x-3)(x^2-6)}{2} \; .$$

Otra Solución De forma intuitiva sabemos que al derivar $h'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ obtenemos $h''(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, donde debemos determinar los valores de $a,\ b,\ c$ y d.
Comparando $3x^2 - 3x - 6 = 3ax^2 + 2bx + c$, tenemos que $a = 1$; $b = -\frac{3}{2}$; $c = -6$,
luego $h'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + d$. Con la condición $h'(1) = \frac{5}{2}$ tenemos:
$h'(1) = 1^3 - \frac{3}{2} - 6 + d = \frac{5}{2} \implies d = 9$. Por lo tanto
$h'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 9.$
Procediendo análogamente obtenemos los demás resultados.

Análogamente, podemos deducir que $h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 9x + C_2$, donde C_2 es una constante por determinar, como $h(0) = 0$ tenemos

$$h(0) = \frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{2} - 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 + C_2 = 1 \implies C_2 = 1 \; .$$

Por lo tanto

$$h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 9x + 1 \; .$$

(2.1) Analice el crecimiento de h y sus máximos y mínimos.

La primera derivada y los posibles máximos y/o mínimos para h.

$$h'(x) \quad = \quad \frac{(2x-3)(x^2-6)}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 \quad &\iff \quad (2x-3)(x^2-6) = 0 \\ &\iff \quad x = \frac{3}{2} \ \vee \ x = -\sqrt{6} \ \vee \ x = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Intervalos de crecimiento (signo de la primera derivada).

$$\begin{aligned} h'(x) > 0 \quad &\iff \quad (2x-3)(x^2-6) > 0 \\ &\iff \quad (x-(-\sqrt{6}))(x-\frac{3}{2})(x-\sqrt{6}) > 0 \\ &\iff \quad x \in \left]-\sqrt{6}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\sqrt{6}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Intersectando con el *Dom* h

$$x \in \left]-\sqrt{6}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\sqrt{6}, 4\right[$$

En éste intervalo h es creciente $\nearrow$.

Análogamente obtenemos

$$h'(x) < 0 \quad \iff \quad x \in \left]-\infty, -\sqrt{6}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \sqrt{6}\right[$$

Intersectando con el *Dom h*

$$x \in \,]-4, -\sqrt{6}[\, \cup \,]\frac{3}{2}, \sqrt{6}[$$

En éste intervalo f es decreciente $\searrow$.

En consecuencia, por el criterio de la primera derivada para máximos y mínimos tenemos que: en $x = \frac{3}{2}$, h tiene un máximo local y en $x = -\sqrt{6}$; $x = \sqrt{6}$, h tiene un mínimo local.

(2.2) Analice la concavidad de h y sus puntos de inflexión.

La segunda derivada y los posibles puntos de inflexión para h.

$$h''(x) = 3(x+1)(x-2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} h''(x) = 0 &\iff (x+1)(x-2) = 0 \\ &\iff x = -1 \ \vee \ x = 2 \end{aligned}$$

Intervalos de concavidad (signo de la segunda derivada).

$$\begin{aligned} h''(x) > 0 &\iff (x+1)(x-2) > 0 \\ &\iff x \in]-\infty, -1[\, \cup \,]2, +\infty[\end{aligned}$$

Intersectando con el *Dom h*

$$x \in]-4, -1[\, \cup \,]2, 4[\ .$$

En éste intervalo g es cóncava hacia arriba $\smile$.

Análogamente obtenemos

$$h''(x) < 0 \iff x \in \,]-1, 2[$$

En éste intervalo h es cóncava hacia abajo $\frown$.

Además podemos notar que $x = -1$ y $x = 2$ son puntos de inflexión.

(2.3) Bosqueje el gráfico de $h(x)$.