Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencia, Departamento de Matemática y C.C.
Asignatura Cálculo I, Módulo Básico Ingenieria, Primer Semestre 2013

Prueba Acumulativa (PA)

Problema 1.

(1.1) Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{2+h}-4}{h}$ **(7 pts.)**

(1.2) Sea $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$ Calcule (si existe) $f'(2)$ **(8 pts.)**

Problema 2.

(2.1) Se quiere diseñar un tanque de almacenamiento de liquido. Las especificaciones demandan un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos (ver figura 1). Además el radio y la altura del cilindro (medidos en metros) deben cumplir que el radio al cubo por la altura sea igual a 64. ¿Cuál será el mínimo volumen que puede contener este tanque? **(7 pts.)**

(2.2) Encuentre el punto sobre el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, en el cuarto cuadrante, más próximo al punto (3,-5) **(8 pts.)**

Problema 3. Considere un triángulo (ver figura 2) cuyas medidas de los lados (en metros) son AC = b, CB = 2b, AB = c y $\angle ACB = 60^0$. Una persona corre desde el vértice B al vértice C con una rapidez constante de $2[\frac{m}{seg}]$. ¿A qué tasa cambia la distancia entre la persona y el vértice A cuando ésta se encuentra a $b[m]$ del vértice B? **(15 pts.)**

Problema 4. Determine la ecuación de la recta normal a la curva dada por la relación $x^2\sqrt{7+xy^2} = 4y+8$, en el punto (2,y), $y > 2$ **(15 pts.)**

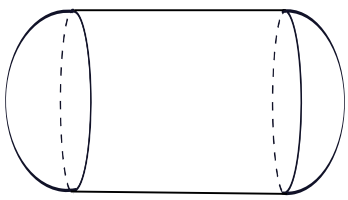


Figura 1

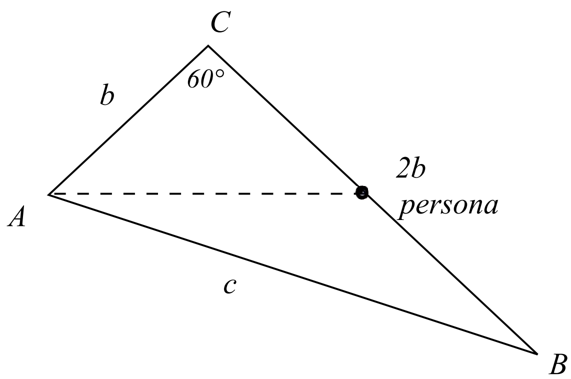


Figura 2

PAUTA Prueba Acumulativa (PA)

Problema 1.

(1.1) Calcule $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{2+h}-4}{h}$ **(7 pts.)**

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^{2+h}-4}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(2+h)\ln(2+h)}-4}{h} \\
&\underbrace{=}_{L'H} \lim_{h\to 0} \frac{e^{(2+h)\ln(2+h)}\left(\ln(2+h)+1\right)}{1} \\
&= 4(\ln(2)+1)\ .
\end{aligned}$$

(1.2) Sea $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$ Calcule (si existe) $f'(2)$ **(8 pts.)**

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^{2+h}-4}{h} \\
&= 4\ln(2)+1\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^{2}-4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+4)}{h} \\
&= 4\ .
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, $f'(2)$ no existe.

Problema 2.

(2.1) Se quiere diseñar un tanque de almacenamiento de liquido. Las especificaciones demandan un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos (ver figura 1). Además el radio y la altura del cilindro (medidos en metros) deben cumplir que el radio al cubo por la altura sea igual a 64. ¿Cuál será el mínimo volumen que puede contener este tanque? **(7 pts.)**

Sean r el radio, h la altura y V el volumen del tanque. Por las condiciones del problema $r^3h = 64$, de donde $h = \frac{64}{r^3}$.

Pero

$$\begin{aligned}
V(r,h) &= \pi r^2 h + 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\right), \quad \text{luego} \\
V(r) &= \pi r^2 \frac{64}{r^3} + \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{64\pi}{r} + \frac{4}{3}\pi r^3 \quad r > 0\ .
\end{aligned}$$

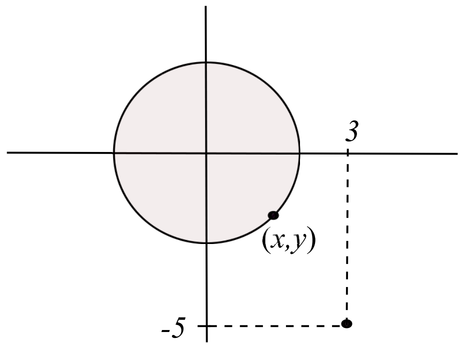
Así

$$V'(r) = -\frac{64\pi}{r^2} + 4\pi r^2$$

y $V'(r) = 0 \iff r = 2$. Además $V''(r) = \frac{128\pi}{r^3} + 8\pi r > 0$ para todo $r > 0$. Por lo tanto V tiene un mínimo en $r = 2$, lo que implica $h = 8$.

Así, el mínimo volumen que puede contener el tanque con las condiciones impuestas es $\frac{128\pi}{3}$ $[m^3]$.

(2.2) Encuentre el punto sobre el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, en el cuarto cuadrante, más próximo al punto (3,-5) **(8 pts.)**



La distancia del (x, y) al punto $(3, -5)$ es $\sqrt{(x-3)^2 + (y-(-5))^2}$. Como la función $\sqrt{\dots}$ es creciente, entonces minimizar $\sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2}$ es equivalente a minimizar $(x-3)^2 + (y+5)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25$.

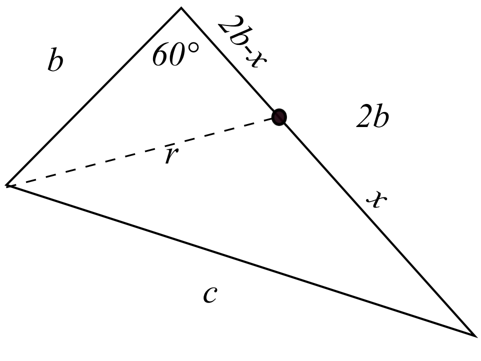
Como el punto (x, y) debe estar en el circulo y en el cuarto cuadrante, entonces $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Así, la función a optimizar es

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 34 + 4 - x^2 + 10\left(-\sqrt{4 - x^2}\right) \\ &= -6x + 38 + 10\left(-\sqrt{4 - x^2}\right) \quad , \quad x \in [0, 2] \ . \end{aligned}$$

Como $f'(x) = -6 + \dfrac{10x}{\sqrt{4 - x^2}}$ y $f'(x) = 0 \iff x^2 = \frac{36}{34}$, como $x \in [0, 2]$, entonces $x = \frac{6}{\sqrt{34}}$.

Además $f''(\frac{6}{\sqrt{34}}) > 0$, por lo que f tiene un mínimo en $x = \frac{6}{\sqrt{34}}$. Ahora, desde la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ se obtiene que $y = \frac{-10}{\sqrt{34}}$ (pues el punto debe estar en el cuarto cuadrante). En consecuencia, el punto sobre el circulo, en el cuarto cuadrante, más próximo al punto $(3, -5)$ es $(\frac{6}{\sqrt{34}}, \frac{-10}{\sqrt{34}})$.

Problema 3. Considere un triángulo (ver figura 2) cuyas medidas de los lados (en metros) son AC = b, CB = 2b, AB = c y $\angle ACB = 60^0$. Una persona corre desde el vértice B al vértice C con una rapidez constante de $2[\frac{m}{seg}]$. ¿A qué tasa cambia la distancia entre la persona y el vértice A cuando ésta se encuentra a $b[m]$ del vértice B? **(15 pts.)**



Por el teorema de los cosenos

$$\begin{aligned} r^2 &= b^2 + (2b-x)^2 - 2b(2b-x)\cos 60^\circ \\ &= b^2 + (2b-x)^2 - b(2b-x)\ . \end{aligned}$$

Así,

$$2r\frac{dr}{dt} = 2(2b-x)\frac{-dx}{dt} + b\ \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{2x-3b}{2r}\ \frac{dx}{dt}\ .$$

Cuando $x = b$ se obtiene que $r = b$ y como $\frac{dx}{dt} = 2[\frac{m}{seg}]$, entonces $\frac{dr}{dt}\Big|_{x=b} = -1[\frac{m}{seg}]$.

Problema 4. Determine la ecuación de la recta normal a la curva dada por la relación $x^2\sqrt{7+xy^2} = 4y+8$, en el punto $(2, y)$, $\ y > 2$ **(15 pts.)**

Derivando implícitamente en la relación $x^2\sqrt{7+xy^2} = 4y+8$, se obtiene que

$$2x\sqrt{7+xy^2} + x^2\frac{(y^2+2xy\cdot y')}{2\sqrt{7+xy^2}} = 4y'$$

Pero $x = 2$, por lo que y satisface la ecuación $4\sqrt{7+2y^2} = 4y+8$. O sea, $y^2 - 4y + 3 = (y-1)(y-3) = 0$, entonces $y = 3$ (pues $y > 2$) .

En consecuencia $20 + \frac{4(9+12y')}{10} = 4y'$, o sea $y' = \frac{-59}{2}$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta normal es la recta de pendiente $\frac{2}{59}$ y que pasa por el punto (2,3). La ecuación de esta recta es

$$y = \frac{2}{59}x + \frac{173}{59}\ .$$