PEP I

Problema 1.

(1.1) La figura 1 muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[-4,0]$ y recorrido $[-3,0]$. Determine el dominio y recorrido de la función $h(x) = f(-x+2)$. **(8 pts.)**

(1.2) Considere la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{|5x-6| - x^2}{6-5x}}$.

(a) Determine el dominio de f. **(10 pts.)**

(b) Encuentre $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = 1\}$. **(4 pts.)**

(1.3) En la circunferencia de radio 4, que se muestra en la figura 2, sean L y S las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$. Si las cuerdas son paralelas al eje horizontal OX y tienen alturas h y $\frac{1}{2}(h+4)$ respectivamente.

(a) Exprese L y S en función de h, denótelas por $L(h)$ y $S(h)$ respectivamente **(5 pts.)**

(b) Determine el dominio de la función $R(h) = \dfrac{S(h)}{L(h)}$. **(3 pts.)**

Problema 2.

(2.1) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{[2x-1](2x-1)}{|2x-1|}$, donde [ ] representa la parte entera. **(3 pts.)**

(2.2) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\left(1 - \cos(\pi(x-1))\right) & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Calcule $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ **(5 pts.)**

(2.3) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $b \neq 0$. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\sqrt{(x-\pi)^2 + a^2} - 5a}{b(x-\pi)^2} & \text{si} \quad x < \pi \\ 1 & \text{si} \quad x = \pi \\ \dfrac{(b-1)\sin(a(x-\pi))}{x-\pi} & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$

Determine los valores de a y b para que $\displaystyle\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$ **(10 pts.)**

Problema 3. La figura 3 muestra los tres primeros triángulos de una sucesión de triángulos. El triángulo exterior de es equilátero y tiene área igual a $\sqrt{3}\,q$ metros cuadrados. Cada uno de los triángulos interiores se obtiene al unir los puntos medios de todos los lados del triángulo anterior. Calcule S_n, la suma de los perímetros de los n primeros triángulos de la sucesión, luego calcule $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$. **(12 pts.)**

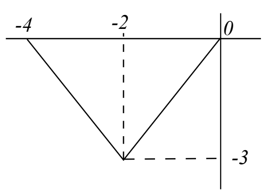


Figura 1

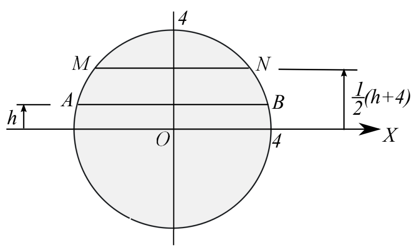


Figura 2

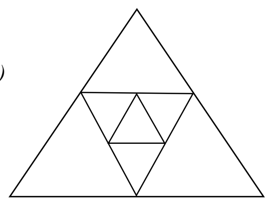


Figura 3

PAUTA PEP I

Problema 1.

(1.1) La figura 1 muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[-4,0]$ y recorrido $[-3,0]$. Determine el dominio y recorrido de la función $h(x) = f(-x+2)$. **(8 pts.)**

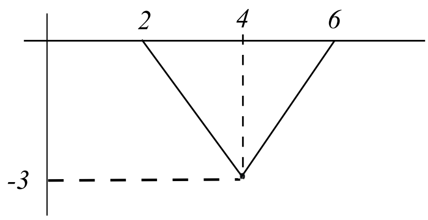
La expresión para f es $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 6 & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ \frac{3}{2}x & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$

Luego

$h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(-x+2) - 6 & \text{si} \quad -4 \leq -x+2 \leq -2 \\ \frac{3}{2}(-x+2) & \text{si} \quad -2 \leq -x+2 \leq 0 \end{cases}$

Esto es

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - 9 & \text{si} \quad 4 \leq x \leq 6 \\ -\frac{3}{2}x + 3 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



El dominio $Dom\ h = [2,6]$ y el recorrido es $Rec\ h = [-3,0]$.

(1.2) Considere la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{|5x-6| - x^2}{6-5x}}$.

(a) Determine el dominio de f. **(10 pts.)**

El dominio de la función es dado por el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{|5x-6| - x^2}{6-5x} \geq 0, \quad x \neq \frac{6}{5}$$

Por la definición de valor absoluto tenemos

$$|5x-6| = \begin{cases} 6-5x & \text{si } x < \frac{6}{5} \\ 5x-6 & \text{si } x \geq \frac{6}{5} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos:

- Caso en que $x \geq \frac{6}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{5x-6-x^2}{6-5x} \geq 0 \ ; \ x \neq \frac{6}{5} \quad & \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-2)(x-\frac{6}{5}) \geq 0 \ ; \ x \neq \frac{6}{5} \\ & \Leftrightarrow \quad (x-\frac{6}{5})(x-2)(x-3) \geq 0 \quad x \neq \frac{6}{5} \\ & \Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{6}{5}, 2\right] \cup [3, +\infty[\end{aligned}$$

Intersectando con la condición $x \geq \frac{6}{5}$, se tiene

$$S_I \equiv \left]\frac{6}{5}, 2\right] \cup [3, +\infty[.$$

- Caso en que $x < \frac{6}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{6-5x-x^2}{6-5x} \geq 0 \ ; \ x \neq \frac{6}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+6)(x-\frac{6}{5}) \geq 0 \ ; \ x \neq \frac{6}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad (x+6)(x-1)(x-\frac{6}{5}) \geq 0 \quad x \neq \frac{6}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [-6,1] \ \cup \ \left]\frac{6}{5}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Intersectando con la condición $x < \frac{6}{5}$, se tiene

$$S_{II} \equiv \ [-6,1] \ .$$

Finalmente la unión de S_I y S_{II} es la solución de la inecuación y el respectivo dominio de f.

$$S_F = S_I \cup S_{II} = \ [-6,1] \ \cup \ \left]\frac{6}{5}, 2\right] \ \cup \ [3, +\infty[\ .$$

(b) Encuentre $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = 1\}$. **(4 pts.)**
Resolvemos la ecuación $\dfrac{|5x-6| - x^2}{6-5x} = 1, \quad x \neq \dfrac{6}{5}$. Tenemos los casos siguientes

- Caso en que $x \geq \frac{6}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{5x-6-x^2}{6-5x} = 1 \ ; \ x \neq \frac{6}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+10x-12}{6-5x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 5 - \sqrt{13} \ \vee \ x = 5 + \sqrt{13} \end{aligned}$$

- Caso en que $x < \frac{6}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{-5x+6-x^2}{6-5x} = 1 \ ; \ x \neq \frac{6}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{5x-6} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Finalmente $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = 1\} = \{0 \ , \ 5 - \sqrt{13} \ , \ 5 + \sqrt{13}\}$

(1.3) En la circunferencia de radio 4, que se muestra en la figura 2, sean L y S las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$. Si las cuerdas son paralelas al eje horizontal OX y tienen alturas h y $\frac{1}{2}(h+4)$ respectivamente.

(a) Exprese L y S en función de h, denótelas por $L(h)$ y $S(h)$ respectivamente **(5 pts.)**
De la geometría tenemos: $h^2 + x^2 = 16 \ \Leftrightarrow \ x = \pm\sqrt{16-h^2}$, como x define una distancia, consideramos $x = \sqrt{16-h^2}$. Así

$$L(h) = 2x = 2\sqrt{16-h^2}$$

Análogamente, la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ es $2x = 2\sqrt{(2-\frac{h}{2})(6+\frac{h}{2})}$, por lo que

$$S(h) = \sqrt{(4-h)(12+h)}.$$

(b) Determine el dominio de la función $R(h) = \dfrac{S(h)}{L(h)}$. **(3 pts.)**

$$R(h) = \frac{\sqrt{(4-h)(12+h)}}{2\sqrt{(4-h)(4+h)}}$$

El dominio viene dado por $h > 0$ (pues h es altura) y el conjunto solución del sistema de inecuaciones

$$(4-h)(12+h) \geq 0 \quad \wedge \quad (4-h)(4+h) > 0$$

$$h \in [-12, 4] \quad \wedge \quad h \in]-4, 4[.$$

Finalmente el dominio es

$$Dom\ R =]0, 4[$$

Problema 2.

(2.1) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{[2x-1](2x-1)}{|2x-1|}$, donde [ ] representa la parte entera. **(3 pts.)**

Como $x \to \frac{1}{2}^-$, entonces $2x - 1 \to 0^-$, por lo que $|2x-1| = -(2x-1)$ y $[2x-1] = -1$. Así,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{[2x-1]\ (2x-1)}{-(2x-1)} = -\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} [2x-1] = 1.$$

(2.2) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\,(1 - \cos(\pi(x-1))) & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Calcule $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ **(5 pts.)**

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(\pi h)}{h^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(\pi h)}{h^2} \cdot \frac{1 + \cos(\pi h)}{1 + \cos(\pi h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi h)}{h^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(\pi h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi h)}{h^2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + \cos(\pi h)} \\
&= \pi^2 \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi h)}{\pi h} \right)^2 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + \cos(\pi h)} \\
&= \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

(2.3) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $b \neq 0$. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\sqrt{(x-\pi)^2 + a^2} - 5a}{b(x-\pi)^2} & \text{si} \quad x < \pi \\ 1 & \text{si} \quad x = \pi \\ \dfrac{(b-1)\sin(a(x-\pi))}{x-\pi} & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$

Determine los valores de a y b para que $\displaystyle\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$ **(10 pts.)**

Calculando los limites laterales, tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^-} f(x) &= \lim_{x\to\pi^-} \frac{5\sqrt{(x-\pi)^2+a^2}-5a}{b(x-\pi)^2} \\
&= \frac{5}{b}\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{(x-\pi)^2+a^2}-a}{(x-\pi)^2}\cdot\frac{\sqrt{(x-\pi)^2+a^2}+a}{\sqrt{(x-\pi)^2+a^2}+a} \\
&= \frac{5}{b}\lim_{x\to\pi^-} \frac{(x-\pi)^2+a^2-a^2}{(x-\pi)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-\pi)^2+a^2}+a} \\
&= \frac{5}{b}\lim_{x\to\pi^-} \frac{(x-\pi)^2}{(x-\pi)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-\pi)^2+a^2}+a} \\
&= \frac{5}{b}\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sqrt{(x-\pi)^2+a^2}+a} \\
&= \frac{5}{2ab}
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^+} f(x) &= \lim_{x\to\pi^+} \frac{(b-1)\sin(a(x-\pi))}{x-\pi} \\
&= (b-1)\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin(a(x-\pi))}{x-\pi}
\end{aligned}
$$

Con el cambio de variables $t = x-\pi$, si $x\to\pi^+$, entonces, $t\to 0^+$ y el limite queda

$$
\begin{aligned}
(b-1)\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(at)}{t} &= a(b-1)\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(at)}{at} \\
&= a(b-1).
\end{aligned}
$$

La condición $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = f(\pi)$, equivale a: $\frac{5}{2ab} = 1 \ \wedge\ a(b-1) = 1.$

Resolviendo el sistema para a y b se obtienen $a = \dfrac{3}{2}$ y $b = \dfrac{5}{3}$.

Problema 3. La figura 3 muestra los tres primeros triángulos de una sucesión de triángulos. El triángulo exterior es equilátero y tiene área igual a $\sqrt{3}\,q$ metros cuadrados. Cada uno de los triángulos interiores se obtiene al unir los puntos medios de todos los lados del triángulo anterior. Calcule S_n, la suma los perímetros de los n primeros triángulos de la sucesión, luego calcule $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. **(12 pts.)**

El área de un triángulo equilátero de lado L es $A = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$, por lo tanto, el lado del primer triángulo se obtiene de la ecuación $\frac{\sqrt{3}}{4}L_1^2 = \sqrt{3}\ q \ \Leftrightarrow\ L_1 = \sqrt{4q} = 2\sqrt{q}$.

El lado de cualquiera de los otros triángulos de la sucesión es la mitad del lado del triángulo que lo precede. Así, el lado del segundo triángulo de la sucesión es $L_2 = \sqrt{q}$, y el del tercero es $L_3 = \frac{\sqrt{q}}{2}$, y así sucesivamente, $L_k = \frac{2\sqrt{q}}{2^{k-1}}$, $k \geq 1$.

Por lo tanto la suma de los perímetros de los n primeros triángulos es

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n} 3L_k = 3\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sqrt{q}}{2^{k-1}} = 6\sqrt{q}\ \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j = 6\sqrt{q}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}
$$

Finalmente

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = 6\sqrt{q}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 12\sqrt{q}.
$$