Pauta PEP 2

1.1) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h-1)\ln(2(1+h)-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} 2\ln(2h+1)$$
$$= 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(h+1-1)}{h} = 2$$

En consecuencia, $f'(1)$ no existe.

1.2)

Intervalo	(a,b)	(b,c)	(c,d)	(d,e)	(e,f)	(f,g)
$v(t)$	$+$	0	$+$	$+$	$-$	$-$
$a(t)$	$-$	0	$+$	$-$	$-$	$+$

Desacelera en (a,b) ; (d,e) ; (f,g)

Acelera en (c,d) ; (e,f)

Los intervalos donde desacelera son aquellos en los cuales los signos de $v(t)$ y $a(t)$ son distintos, en cambio los intervalos donde acelera son aquellos en los cuales los signos de $v(t)$ y $a(t)$ son iguales.

2. $f'(x_0) = -2x_0$ $\qquad (x_0, y_0) = (x_0, 1-x_0^2)$

La recta L que tiene pendiente $-2x_0$ y que pasa por el punto $(x_0, 1-x_0^2)$ tiene ecuación

$L: \; y = (-2x_0)x + (1+x_0^2)$. Además la recta L corta a los ejes coordenados en los puntos $(0, 1+x_0^2)$ y $\left(\frac{1+x_0^2}{2x_0}, 0\right)$.

Así, el área del triángulo de vértice $(0,0)$, $(0, 1+x_0^2)$, $\left(\frac{1+x_0^2}{2x_0}, 0\right)$ ~~tiene~~ es

$A(x_0) = \frac{(1+x_0^2)^2}{4x_0}$, por lo que

$$\frac{dA(x_0)}{dx_0} = \frac{1+x^2}{4x^2}(3x^2-1) \quad ; \quad \frac{d^2A(x_0)}{dx_0^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} + \frac{3}{2}x$$

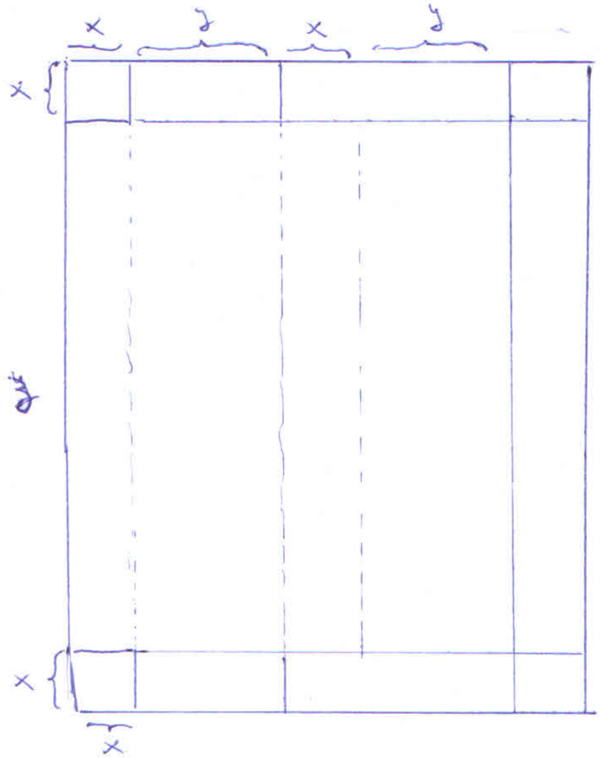
Además, $\frac{dA(x_0)}{dx_0} = 0$ si $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ó $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pero (x_0, y_0) pertenece al primer cuadrante por lo que $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

También, $\left.\frac{d^2A(x_0)}{dx_0^2}\right|_{x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}} > 0$, por lo que $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ es un punto donde $A(x_0)$ alcanza un mínimo.

Finalmente, la ecuación de L es $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{3}$

3.



dibujo no a escala

$2x+2y=15 \longrightarrow x+y=\frac{15}{2} \longrightarrow y=\frac{15}{2}-x$

$2x+z=30 \longrightarrow z=30-2x$

$$V = xyz = x\left(\frac{15}{2}-x\right)(30-2x) = 2x^3-45x^2+225x$$

$$V'(x)=6x^2-90x+225 = 6x^2-15\cdot 6x+15^2$$

$V'(x)=0$ ssi $x=\dfrac{15\cdot 6+\sqrt{15^2\cdot 6^2-4\cdot 6\cdot 15^2}}{2\cdot 6}=\dfrac{15}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

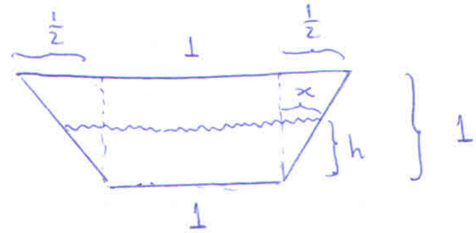
ó $x=\dfrac{15\cdot 6-\sqrt{15^2\cdot 6-4\cdot 6\cdot 15^2}}{2\cdot 6}=\dfrac{15}{2}-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Como $y=\frac{15}{2}-x$ y además $y>0$, entonces $x=\frac{15}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$V''(x)=12x-90$, por lo que $V''\left(\frac{15}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)=-30\sqrt{3}<0$.

Así, las dimensiones con las que se obtiene volumen máximo son
$x=\frac{15}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}$; $y=\frac{5\sqrt{3}}{2}$; $z=15+5\sqrt{3}$ (en centímetros)

4.



$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{x}{h} \rightarrow \quad x = \frac{h}{2}$$

$$V = \left(1\,[m]\, h\,[m] + \frac{2h\,[m] \cdot \frac{h}{2}\,[m]}{2} \right) 4\,[m]$$

$$= \left(4h + 2h^2\right)[m^3]$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\frac{dh}{dt} + 4h\frac{dh}{dt} \longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4+4h}$$

Si $h = 0{,}25\,[m]$ y $\frac{dV}{dt} = 0{,}5\left[\frac{m^3}{seg}\right]$, entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}5}{4 + 4 \cdot 0{,}25}\left[\frac{m}{seg}\right]$$

$$= 0{,}1\,[m/seg]$$